ZFN

Zagadnienia Filozoficzne w Nauce

LX
2016

Copernicus Center

Copernicus Center PRESS

Zagadnienia Filozoficzne w Nauce

© Copernicus Center Press, 2016

Kolegium redakcyjne:
Redaktor Naczelny: dr hab. Paweł Jan Polak
Zastępca Redaktora Naczelnego: dr. hab. Janusz Mączka
Redaktor Honorowy: prof. dr hab. Michał Heller
Sekretarz redakcji: Piotr Urbańczyk

Projekt okładki: Mariusz Banachowicz

Adiustacja i korekta: Artur Figarski

Redakcja techniczna: Artur Figarski

Projekt typograficzny: Mirosław Krzyszkowski

Skład: MELES-DESIGN

ISSN 0867-8286 (wyd. papierowe)
ISSN 2451-0602 (wyd. online)

Nakład: 500 egz.

Adres redakcji:
Zagadnienia Filozoficzne w Nauce
Wydział Filozoficzny UPJPII
ul. Kanonicza 9
31-002 Kraków
e-mail: zagadnienia@upjp2.edu.pl
www.zfn.edu.pl

Copernicus Center PRESS

Wydawca:
Copernicus Center Press Sp. z o.o.
Pl. Szczepański 8, 31-011 Kraków
tel. (+48) 12 430 63 00
e-mail: marketing@ccpress.pl
www.ccpress.pl

Druk: Azymut

Zagadnienia Filozoficzne w Nauce

LX ▪ 2016

RECENZJE

Wstęp

Oddajemy do Państwa rąk sześćdziesiąty numer *Zagadnień Filozoficznych w Nauce*. Można śmiało powiedzieć, że czasopismo weszło w wiek dojrzały. ZFN jednak wciąż się rozwijają – stały się właśnie oficjalnie czasopismem drukowanym i internetowym zarazem. Jak twierdził Karl Raimund Popper, treści zaludniają świat nr 3, uniezależniają się więc w pewnym sensie od nośnika. Mamy nadzieję, że prezentowane tu treści nadal będą przyciągać czytelników, a nowe nośniki tylko pomogą udostępnić je w dogodnej dla każdego formie.

Przeglądając archiwalne numery *Zagadnień* łatwo uświadomić sobie, jak długa droga została już przebyta. Początki czasopisma to skromne objętościowo i graficznie, nielegalne samizdatowe wydania. Są one świadectwem tego, w jaki sposób organizowało się interdyscyplinarne środowisko łączące ludzi poszukujących prawdy w kontekście działalności naukowej. Kolejne numery ZFN pokazują, jak rozwijało się to środowisko i jak wraz z nim rozwijało się samo czasopismo. Wszystko to nie byłoby z pewnością możliwe bez celnych pomysłów oraz wielkiego zaangażowania jednej osoby – **Michała Hellera**.

* * *

Specjalną okazją do napisania tych słów jest **80. rocznica urodzin** założyciela i wieloletniego Redaktora Naczelnego *Zagadnień*.

Michale, osiemdziesiąt lat z perspektywy historii filozofii to wiek wciąż młodzieńczy, taką też niech będzie nadal siła Twej inspiracji. Nie dajmy się zwieść licznym doktoratom *honoris causa*, jak choćby ostatniemu nadanemu w czerwcu 2016 r. przez Twój Wydział Filozoficzny UPJPII... wszak wszyscy wiemy, że dla Ciebie laur nie po to jest, aby spocząć na laurach. Życzymy Tobie (i zarazem sobie), aby filozofia w nauce nadal rozwijała się równie pomyślnie jak dotychczas, aby Twe dzieło – *Zagadnienia Filozoficzne w Nauce* – nadal pełniło rolę ogniska badań oraz źródła inspiracji. Tobie, Twej filozofii i Twemu dziełu życzymy więc: *Ad multos annos!*

Paweł Polak
Janusz Mączka
Piotr M. Urbańczyk

Emocje negatywne a racjonalność decyzji

Aleksandra Głos
Uniwersytet Jagielloński, Wydział Prawa i Administracji
Wojciech Załuski
Uniwersytet Jagielloński, Wydział Prawa i Administracji

Negative Emotions and Rationality of Decision-Making

Abstract

The paper provides an analysis of the impact of negative emotions on decision-making processes. It questions the common-sense view that negative emotions diminish rationality of decisions, i.e., increase the probability of making suboptimal choices. It is argued in the paper that this view is untenable on the grounds of neuroscience, cognitive science and evolutionary theory: the results provided by these sciences support the view that negative emotions in most instances of their occurrence, i.e. types of negative emotions, not only fail to undermine rationality of decision-making but substantially contribute to it. This does mean saying that token-negative emotions never undermine rationality of decision-making. But, as is argued in the paper, the fact that token-negative emotions may have sometimes this kind of negative effect is fully consistent with the claim that, as a rule, the effect is positive, so that one can speak about the causal connection between types of negative emotion and rational decision-making.

Keywords

negative emotions, token emotions, emotion types, rationality, decision-making

1. Wprowadzenie

Zgodnie z obiegowym poglądem na temat zależności między negatywnymi emocjami (to znaczy, emocjami *doświadczanymi jako przykre*, np. smutkiem, gniewem, strachem) i racjonalnością decyzji, emocje negatywne zaburzają procesy decyzyjne, prowadząc do wyników sub-optymalnych, to znaczy, gorszych od tych, do jakich prowadzi 'chłodna' deliberacja nad różnymi wariantami działań i ich skutkami. Pogląd ten jednak jest tylko częściowo słuszny. Jest prawdą, że w wielu konkretnych sytuacjach decyzyjnych emocje negatywne prowadzą do wyników sub-optymalnych. Dzieje się tak jednak tylko wtedy, kiedy same te emocje przybierają postać niewłaściwą, tzn. jeśli same są nieracjonalne. Jeśli jednak emocje te przybierają postać właściwą, tzn. są racjonalne, 'kierowane' przez nie procesy decyzyjne prowadzą do wyników optymalnych. Zważywszy dodatkowo na to, że, jak będziemy argumentować, postać racjonalna tych emocji jest postacią *typową*, okaże się, że w obiegowym poglądzie jest, by tak rzec, więcej fałszu niż prawdy. Nasze rozważania, w których spróbujemy rozwinąć powyższe wątki, podzielimy na trzy części. W pierwszej przedstawimy ogólne refleksje na temat racjonalności i emocji. W drugiej uzasadnimy tezę o pozytywnych skutkach negatywnych emocji, które przybierają postać racjonalną. W tym kontekście będziemy mówić o *typach emocji* (*emotion types*), bronimy bowiem tezy, że emocje (w tym emocje negatywne) w swoich typowych, *statystycznie dominujących*, 'realizacjach', są racjonalne, i jako takie mają pozytywne skutki decyzyjne. W trzeciej części pokażemy, w jaki sposób emocje negatywne mogą generować wyniki sub-optymalne, jeśli przybierają postać niewłaściwą. W tym kontekście będziemy mówić o *konkretnych i atypowych 'realizacjach' typów emocji* (*emotion tokens*). Podział emocji na typy i ich konkretne realizacje pozwalają zwięźle wysłowić naszą tezę główną: emocje negatywne (scil. *typy emocji*) mają pozytywny wpływ na procesy decyzyjne, co nie stoi w sprzeczności z tezą, że wiele ich konkretnych realizacji (scil. *emotion tokens*) ma wpływ negatywny.

2. Emocje i racjonalność

Teza o racjonalności emocji budzi kontrowersje. Ze względu na swoją ulotną naturę uczucia są wciąż najmniej zbadanym, a więc i najsłabiej rozumianym wymiarem ludzkiego umysłu, z konieczności zatem ich związek z racjonalnością rodzi wiele słusznych pytań. Pytanie o racjonalność emocji można zadawać przynajmniej na dwóch poziomach. Pierwszy, bardziej fundamentalny, dotyczy samej natury emocji i ich stosunku do prawdy. Poziom ten można nazwać ontologiczno-epistemologicznym. Drugi poziom dotyczy wymiaru praktycznego, a więc pytania, w jaki sposób emocje wpływają na racjonalność naszego działania. Oba te pytania są ze sobą ściśle powiązane, a odpowiedź na pierwsze z nich warunkuje odpowiedź na drugie.

Tradycyjnie emocje uważało się za wyłączone z dziedziny rozumu. Adam Węgrzecki zgrabnie rekonstruuje tezę o irracjonalności uczuć i dzieli ją na cztery cząstkowe postulaty na temat natury emocji (Węgrzecki, 1990). Głoszą one, że emocje są: 1) poznawczo ślepe 2) nie podlegają żadnym rozumowym prawom 3) pogrążone w zmysłowości 4) odpowiedzialne za destrukcję sensu. Warto przyjrzeć się tym czterem klasycznym hipotezom na temat natury emocji w świetle współczesnej psychologii. Na mocy pierwszej hipotezy, zawdzięczającej swą metaforykę Immanuelowi Kantowi[1], emocje redukuje się do zdarzeń fizjologicznych, arbitralnych reakcji organizmu, niemających żadnego związku z prawdą ani sensem wydarzeń (współcześnie pogląd ten dobitnie wyraża lapidarne hasło Roberta Zajonca: *preferences need no inferences* [1980]). Taka hipoteza w dość rażący sposób pomija aspekt „*aboutness*" emocji, czyli

[1] Kant powiada: „Atoli każdy afekt jest ślepy bądź w wyborze swojego celu, bądź – o ile cel ten został wytknięty przez rozum – w jego realizacji; afekt bowiem jest tym poruszeniem umysłu, który czyni go niezdolnym do swobodnego rozważania zasad, by stosownie do nich siebie determinować" (Kant, 1964, s. 176).

fakt, że emocje zawsze są „o czymś”, zachodzą w związku z jakimś zewnętrznym zdarzeniem (mają charakter intencjonalny). Co istotne, określone emocje pojawiają się zwykle w odpowiedzi na pewne typy wydarzeń. Ogromną zasługą psychologii kognitywnej jest ustalenie wielu takich emocjonalnych scenariuszy, np. na gruncie modelu OCC (Ortony, Clore, Collins) emocja gniewu pojawia się w reakcji na działania sprawców innych niż ja (w przeciwnym razie pojawiłaby się emocja wstydu), które są godne potępienia i powodują cierpienie (Clore, 2012); podobny „skrypt” gniewu ustaliła Anna Wierzbicka, twórczyni lingwistycznej metody badania emocji – w jej ujęciu to, że x gniewa się na y, oznacza, że „coś złego się stało/bo ktoś zrobił (nie zrobił)/Nie chcę żeby działo się coś jak to/Chcę coś z tym zrobić jeśli mogę” (Wierzbicka, 1999, s. 39). Regularność pojawiania się emocji przeczy tezie drugiej – o rzekomej „bezprawności” uczuć. Dodatkowo, argument z regularności można wzmocnić o katalog praw emocji, zawierający podstawowe zasady ich powstawania, zmiany, wzajemnego wpływu i wygasania, autorstwa Nico Frijdy (1989). Warto przytoczyć klasyczną definicję emocji autorstwa tego autora: „emocje można pojmować jako proces sygnalizowania, że dzieje się coś istotnego z punktu widzenia dobrostanu jednostki oraz zadań realizowanych przez system poznawczy i zachowanie” (Frijda, 2012, s. 56). Uczucia, zdaniem tego umiarkowanego kognitywisty[2], są zazwyczaj

[2] Umiarkowany kognitywizm należy odróżniać od „hiperkognitywizmu”. Kognitywizm uznaje emocje za złożenia trzech elementów – poznawczego, motywacyjnego i fizjologicznego, hiperkognitywizm

spowodowane przez świadome lub nieświadome wartościowanie jakiegoś zdarzenia jako istotnego z punktu widzenia ważnych interesów jednostki („prawo zaangażowania"). Zgodność danego zdarzenia z celami jednostki powoduje emocje 'pozytywne', groźba udaremnienia tych celów przez jakieś zdarzenie budzi emocje 'negatywne'. Frijda podkreśla, że rdzeniem emocji jest uruchomienie zdolności do działania – ich funkcja motywacyjna (mówiąc językiem Kanta: wolicjonalna). Emocje organizują działanie człowieka i włączają programy emocjonalne, które w odróżnieniu od programów behawioralnych i poznawczych mają status programu pilnego. Być może właśnie owa „pilność" i „pierwotność" programów emocjonalnych sprawia, że procesy uczuciowe, szczególnie te intensywne, zdolne są zaburzyć subtelne wnioskowania i misternie utkane plany. Należy przyznać rację stoikom, których argumentacja na rzecz pokoju ducha nie miała na celu eliminacji uczuć, ale ich złagodzenie (sama możliwość takiej racjonalnej „kontroli" przemawia za głębokim związkiem emocji i rozumu); łagodne emocje nie posiadają destrukcyjnej siły. Wszystko to dowodzi, że w obliczu dorobku współczesnej psychologii teza o irracjonalnej „naturze" emocji okazuje się nieuzasadniona: mają one bowiem odniesienie od rzeczywistości, występują z coraz lepiej zbadaną regularnością, podlegają określonym prawom, są powiązane z procesami poznawczymi i wolicjonalnymi (więc nie „pogrążone w zmysłowości"), a ponadto,

---

sytuuje emocje w sferze poznawczej, uznając je za „wiązki sądów"; „stany cielesne" nie są koniecznymi elementami emocji (por. Nussbaum, 2001).

łącząc informację zewnętrzną z informacją wewnętrzną (C. Izard używał w tym kontekście sugestywnej metafory *interface'u* [2012]), nadają wydarzeniom sens osobisty.

Warto zapytać, jak tak rozumiane emocje wpisują się w kanony racjonalności, w szczególności racjonalności praktycznej. Najbardziej przekonujący model tej ostatniej przedstawia teoria racjonalnego wyboru. Jego wymownego opisu dostarczył Jon Elster (1979): racjonalny podmiot przypomina Odyseusza w drodze do Itaki, który tak wytrwale zmierza do celu, że nawet urzekający śpiew syren nie odwodzi go od kontynuacji raz obranego kursu. Przykład podróży Odyseusza pokazuje, że racjonalność rozumiana jako skuteczność działania wymaga spełnienia kilku kryteriów: potrzeba m.in. wystarczająco spójnego i przechodniego systemu przekonań, dopasowania odpowiednich środków do zamierzonych celów; całe przedsięwzięcie wymaga też sporej dozy determinacji – stabilności preferencji i przekonań. W świetle wyżej zarysowanej poznawczej teorii emocji, tradycyjna, platońska interpretacja tego obrazu, utożsamiająca żeglarza (jeźdźca) z rozumem, a emocje z uwodzącymi syrenami (nieokiełznanymi końmi), okazuje się być zbyt upraszczająca. Emocje, będąc powiązanymi z procesami poznawczymi i motywacyjnymi, mają wpływ zarówno na sposób ustalania hierarchii preferencji, jak i determinację w dążeniu do ich realizacji. Uczucia pełnią ponadto kluczową rolę przy określaniu ogólnego kursu żeglugi. Intuicja fenomenologów, jakoby to właśnie emocje otwierały przed nami horyzonty wartości (estetycznych, moralnych, duchowych), które nie są w pełni uchwytne dla naszego, ludzkiego – skończonego rozumu, wpisuje się w obraz racjonalności ograniczonej. Warto pamiętać, że teoria racjonalności ograniczonej, zapoczątkowana przez Simonowską krytykę absolutystycznych roszczeń olimpijskiego rozumu, nie kwestionuje regulatywnej roli tego ideału racjonalności, dowodząc jedynie, że w niektórych empirycznych sytuacjach do niego nie dorastamy. Większa deskrypcyjna trafność modelu racjonalności ograniczonej polega też na tym, że w bardziej realistyczny sposób opisuje ona wpływ emocji na podejmowanie decyzji. Myślenie potoczne, dokonywane w sytuacjach, w których brakuje czasu na ustalanie koniecznych warunków zjawisk, a sądy wydaje się *ad hoc*, wymaga posługiwania się drogami na skróty – heurystykami, które mają mniej lub bardziej afektywny charakter (Slovic, Finucane, Peters, MacGregor, 2002). Choć heurystyki bywają źródłem uchybień zasadom poprawnego rozumowania, ich używanie nie musi prowadzić do błędów strategicznych – badania Antonia Damasio pokazują, że uszkodzenie części mózgu odpowiedzialnych za odczuwanie emocji, zamiast czynić z ludzi podmioty doskonale racjonalne, uniemożliwia im sprawne funkcjonowanie w sytuacjach społecznych, upośledza podejmowanie racjonalnych decyzji oraz realizacje długoterminowych planów (Damasio, 2002)[3]. Jak dowodzą badania Daniela Kahnemana

[3] P. Greenspan wzbogaciła tę linię argumentacyjną o katalog emocjonalnych strategii działania; jej zdaniem dojrzałe „wprzęgnięcie” emocji w działanie prowadzi do jego największej skuteczności, (zob. Greenspan, 2000; por. także: Frank, 1988).

(2012)[4], dopiero głęboka współpraca obu systemów daje prawdziwie nowatorskie efekty poznawcze, czego przykładem mogą być opisywane przez tego autora „intuicyjnie wglądy" profesjonalistów, np. lekarzy, którzy błyskawicznie potrafią ocenić znaczenie danego przypadku i wydać właściwą decyzję.

W dziedzinie praktycznej głównym kryterium racjonalności działania jest jego skuteczność. Nie ma wątpliwości, że, aby działanie okazało się skuteczne, podmiot musi w odpowiednim stopniu orientować się w rzeczywistości (wiedzieć m.in., jakie środki prowadzą do realizacji jego celów oraz właściwie oceniać prawdopodobieństwo ich efektywności). Również dziedzina rozumu praktycznego wymaga zatem zachowania trzonu racjonalności, jakim jest korespondencja między naszymi przekonaniami a zewnętrznym światem. W dziedzinie rozumu teoretycznego, Barbara Skarga wyróżnia dwa pojęcia racjonalności: racjonalność metafizyczną, zakładającą możliwość poznania prawd pewnych i koniecznych, odcyfrowania odwiecznego *more geometrico* oraz racjonalność scjentystyczną, która, będąc zapośredniczoną w nieuchronnych subiektywnych ograniczeniach ludzkiego poznania, stawia sobie o wiele skromniejsze cele – poznanie doczesnych praw rządzących przyrodą (Skarga, 1983). Zdaniem autorki, obu tym ideom wspólna jest dążność do uzasadnienia (*ratio* – powód, rachunek, osąd, uzasadnienie, metoda [Kopaliński, 1999]). Warto zastanowić się, czy kryteria racjonalności teoretycznej można odnieść do samych emocji i ich związku z rzeczywistością.

4 Więcej na temat roli emocji w procesie twórczym w: (Tokarz, 2005).

Arystoteles jako pierwszy zauważył, że emocje daje się uzasadnić. Pisał on: „I tak obawiać się, być odważnym, pożądać, gniewać się, litować się i w ogóle radować się i smucić się można i zbytnio, i za mało, a w obu tych wypadkach niewłaściwie; doznawać zaś tych namiętności we właściwym czasie, wobec właściwych osób, we właściwym celu i we właściwy sposób – to właśnie jest drogą środkową, jak i najlepszą (…)" (Arystoteles 1996, 1106b). Pierwszy poziom uzasadniania emocji dotyczy ich znaczenia sytuacyjnego – emocje mogą pojawiać się w sposób adekwatny lub nieadekwatny do „struktury znaczeniowej danej sytuacji". Warunkiem dokonania takiej oceny jest poznanie powodów emocji. Frijda odróżnia przyczyny w sensie genetycznym od powodów w sensie logicznym. W jego ujęciu emocje mają nie tylko przyczyny, ale i powody, podczas gdy nastroje mają charakter nieintencjonalny (i długotrwały – „rozmyty"). Można, jak twierdzi Frijda, zdawać sobie sprawę, że własny zły nastrój spowodowany jest czyjąś kąśliwą uwagą, co jednak nie wyklucza ogólnej irytacji w stosunku do tej osoby w sytuacjach niezwiązanych z tą uwagą[5]. Jeżeli obiekty emocji są znane, można zapytać o to, czy

[5] Kwestia nieintencjonalności niektórych stanów afektywnych jest kontrowersyjna. Niektórzy aktorzy (np. Reisenzein, Schonpflug, 1992) uważają, że obiektem zgeneralizowanego smutku lub radości jest świat jako całość. Jeszcze mniej uchwytne są obiekty emocji wywoływanych przez sztukę, w szczególności sztukę abstrakcyjną i muzykę. W stosunku do tej ostatniej Langer (1942) postawiła ciekawą, do dziś dociekaną tezę, że muzyka jest „morfologią emocji", a więc, że istnieje korespondencja między strukturą formalną muzyki a strukturą emocji – i tak np. *staccato* (krótkie, urywane dźwięki): radość,

trafnie odwzorowują rzeczywistość. Pytanie o wierność odwzorowania jest powiązane z pytaniem o słuszność reakcji emocjonalnych. Kwestia słuszności emocji rodzi wiele problemów, z których najpoważniejszy trafnie zidentyfikował Platon: czy kochamy kogoś dlatego, że jest godny miłości, czy uważamy go za godnego miłości, ponieważ go kochamy? (Platon, 1984). Postawiony tu problem Eutyfrona dobitnie wyraża nierozwiązywalny splot subiektywności i obiektywności w „poznaniu emocjonalnym", nie wspominając już o kontrowersjach wokół kanonu (i ontycznego statusu) wartości, który miałby być punktem odniesienia dla takich ocen. Sposób odwzorowania rzeczywistości przypomina naśladownictwo artystyczne, w którym obraz świata zewnętrznego przepuszczony jest przez subiektywny pryzmat – w tym sensie bardziej niż ścisłej korespondencji można by mówić o „mimetyczności" emocji. Nie oznacza to jednak, by w sferze poznania emocjonalnego panowała pełna dowolność[6]. O racjonalności emocji można mówić jednak wyłącznie w tym ograniczonym – mimetycznym sensie: wierności odwzorowania struktury znaczeniowej sytuacji i słusznego (w odniesieniu do jakiegoś mniej lub bardziej określonego kanonu) dostosowania do niej reakcji emocjonalnej. Jest oczywiste, że próba mówienia o racjonalno-

aktywność, strach, złość; *legato* (długie, płynnie łączone dźwięki): smutek, tęsknota, powaga, czułość (więcej zob. Gabrielsson, 2009).

[6] Przykładowo, czyjeś estetyczne przeżycie, związane ze słuchaniem hymnów Tavenera, znajduje uzasadnienie w tzw. „wartościach artystycznych" dzieła, podczas gdy wzruszenie związane z odbiorem muzyki popularnej znajduje takie uzasadnienie jedynie w ograniczonym zakresie.

ści emocji w mocnym sensie (jako możliwych do uzasadnienia w sposób pewny i konieczny) musi być chybiona. Niemniej, jak słusznie twierdzi Frijda, nie tylko emocje podlegają prawom, ale i my podlegamy emocjom, toteż jedyną racjonalną postawą wobec tych ostatnich jest próba zrozumienia ich wpływu na sposób naszego myślenia i działania.

3. Pozytywny wpływ emocji negatywnych. Typy emocji (*emotion types*)

W dzisiejszej psychologii kwestionuje się określenie „emocje negatywne". Jest to postawa słuszna o tyle, o ile pod hasłem „emocje negatywne" rozumielibyśmy przekonanie, że emocje negatywne w jakimś np. moralnym sensie są z definicji „złe" lub przynoszą wyłącznie „złe" konsekwencje. Właściwie rozumiana negatywność emocji polega na tym, że ich pojawienie się zwiastuje zagrożenie dla realizacji celów i interesów jednostki, przez co, jak można by rzec za Arystotelesem, wprowadzają osobę w stan „nieprzyjemności". Nie zmienia to faktu, że emocje negatywne mają ambiwalentny status w społecznym odbiorze: z jednej strony panuje wszechobecny kult emocji pozytywnych; z drugiej, liczba zachorowań na depresję (i inne zaburzenia psychiczne) wciąż rośnie[7]. Warto zauważyć również, że

[7] Według Światowej Organizacji Zdrowia w ciągu najbliższych 20 lat depresja stanie się najbardziej rozpowszechnionym problemem zdrowotnym. Więcej na http://www.who.int/topics/depression/en/.

emocje negatywne budzą większe zainteresowanie badaczy: dorobek tradycyjnej psychologii zogniskowany jest wokół psychopatologii (psychologia pozytywna jest dziełem ostatnich dziesięcioleci[8]). Jak słusznie zauważa Joseph Forgas (2011), fakt, że na sześć emocji podstawowych aż cztery to emocje „negatywne": strach, smutek, gniew, wstręt, dobitnie świadczy o tym, że ich rola warta jest zbadania.

Podstawowa teza psychologii kognitywnej głosi, że człowiek jest systemem poznającym (mówiąc bardziej elegancko: istotą obdarzoną instynktem racjonalności [Heller, 2010]), a zatem wszystkie władze jego umysłu nastawione są na poznawanie rzeczywistości. Wpływ emocji na poznanie może odbywać się dwoma kanałami – *stricte* poznawczym i motywacyjnym. L. Alloy i L. Abramson postawiły w 1982 r. słynną tezę „*sadder but wiser*", wyrażającą pogląd, że afekt negatywny może uczynić nas bardziej racjonalnymi (1979). A. Isen i M. Clark sugerowali (1982), że smutek uruchamia bardziej wymagający i głęboki tryb myślenia, w stosunku do „leniwego" – heurystycznego i zatrzymującego się na powierzchni zjawisk, uruchamianego przez afekt pozytywny. Współczesne badania J. Forgasa pokazują, że model ten jest bardziej skomplikowany. Wysiłek i jakość to dwie różne zmienne w modeli infuzji afektu (AIM *affect-in-*

[8] Por. następujący cytat: „Współczesna psychologia była dotąd zaabsorbowana negatywną stroną życia. Funkcjonowanie człowieka interpretowała w kategoriach modelu choroby. Jej głównym sposobem interweniowania było naprawianie szkody. Pod względem teoretycznym do niedawna była ona wiktymologią" (Seligman, 2005, s. 20).

fusion model); jakość w rozumieniu Forgasa oznacza otwartość na informacje z otoczenia, przeciwstawianą podmiotowej konstrukcji. Kombinacja tych elementów daje cztery podstawowe style przetwarzania informacji: dwa pierwsze („bezpośredniego dostępu" vs „motywacyjne") w mniejszym stopniu wchłaniają afekt; dwa kolejne („heurystyczne" vs „rozległe") wchłaniają go w stopniu większym. Afekt pozytywny *grosso modo* powoduje asymilacyjny (*assimilative*), schematyczny, *top-down*, szybszy styl przetwarzania informacji (modelowo: heurystyczny); afekt negatywny – przystosowawczy (*accomodative*), systematyczny, *bottom-up* i bardziej uważny, zewnętrznie zorientowany (modelowo: rozległy). Oba z tych stylów poznawczych mogą być korzystne bądź niekorzystne, w zależności od ocenianego bodźca, sędziego i cech sytuacji (Forgas, 1995).

Afekt wpływa na sposób przetwarzania informacji w dwojaki sposób – za pośrednictwem pamięci oraz sposobu formowania przekonań. W jednym z badań Josepha Forgasa (Forgas, Goldenberg, Unkelbach, 2009) w kiosku z gazetami ustawiono przy kasie dziesięć dziwnych przedmiotów (resorek, maskotka itp.). Po wyjściu ze sklepu klienci byli proszeni o przypomnienie sobie przedmiotów, które stały na kasie. Część badań przeprowadzono w piękny, słoneczny dzień, część w dzień szary i deszczowy (w replikacji tego badania wykorzystywano też smutną/wesołą muzykę jako narzędzie manipulacji nastroju). Test rozpoznania polegał na wypełnieniu kwestionariusza, w którym było 20 pozycji (10 z nich faktycznie stało na kasie, pozostałe nie) i zaznaczenie na 6-stopniowej skali, jak bardzo pewni są tego, że dany przedmiot znajdował się na kasie; dodatkowo badani wypełniali kwestionariusz afektu. Okazało się, że badani pod wpływem negatywnego afektu trafniej i z większym przekonaniem zaznaczali przedmioty. Podobne rezultaty przyniosło badanie (Forgas, Vargs, Lahm, 2005), w którym uczestnicy, wprawieni w dobry lub zły humor (np. przez przypominanie sobie złych lub dobrych wydarzeń ze swojego życia lub wypełnienie testu „na inteligencję", w którym – jak ich informowano – wypadali słabo lub wybitnie), oglądali zdjęcia z wypadku oraz ze ślubu, a następnie odpowiadali na pytania odnośnie do tych zdjęć, z których część zawierała błędną presupozycję (pytano np. o znak drogowy, którego na zdjęciach nie było). Jak się okazało, afekt negatywny prawie całkowicie wyeliminował podatność na błędną informację. Także w tym badaniu uczestnicy przypominali sobie więcej rzeczy i z większymi szczegółami – ich pamięć pracowała lepiej.

Negatywny afekt poprawia nie tylko pamięć, lecz czyni nasz sposób myślenia bardziej precyzyjnym, bardziej odpornym na sugestie, inklinacje poznawcze (efekt halo, efekt atrybucji) oraz wrażliwszym na obiektywne aspekty sytuacji. Jak twierdzi Forgas, osoby smutne cechuje większy sceptycyzm w stosunku do dwóch rodzajów zdarzeń: nowych faktów oraz nieznajomych ludzi (Forgas, East, 2008). W jednym z badań uczestnikom zaprezentowano 50 zdań z tzw. „ogólnej wiedzy o świecie" oraz poinformowano ich, które z nich są prawdziwe (25 było prawdziwych, 25 fałszywych). Dwa tygodnie później jedynie osoby pod wpływem negatywnego afektu były w stanie trafnie ocenić prawdziwość prezentowanych zdań, podczas gdy osoby pod wpływem afektu pozytywnego cechował „łatwowierny optymizm" i gotowe były uznać wszystkie prezentowane zdania za prawdziwe ze względu na to, że były im znajome (na mocy heurystyki dostępności – to, co znajome wydaje się bardziej prawdopodobne). Podobne wyniki dało badanie, w którym uczestnicy mieli za zadanie ocenić wypowiedzi osób, przesłuchiwanych po kradzieży w sklepie (a prezentowanych im w formie materiału video). Osoby pod wpływem negatywnego afektu były bardziej odporne na oszustów i trafniej typowały rzeczywiście winnych.

Jak pokazały badania dotyczące podejmowania decyzji pod wpływem afektu, osoby w nastroju negatywnym dokonują ich wolniej, ale z większą dbałością o przestrzeganie zasad – np. w grze ultimatum smutni uczestnicy okazywali się bardziej „*fair*" (i to także w sytuacji, kiedy podawano im informacje o „niesprawiedliwym zachowaniu" partnera w innym badaniu; osoby smutne potrafiły być sprawiedliwe bez względu na wszystko) (Tan, Forgas, 2010). Szczególnie intrygujący rezultat przyniosło badanie (Unkelbach, Forgas, 2008), w którym szczęśliwi lub rozgniewani uczestnicy mieli za zadanie „strzelać" do sprawców (o ile pojawiali się na ekranie komputera z bronią w ręku), z których część była przedstawiana jako muzułmanie. Co ciekawe, osoby znajdujące się pod wpływem afektu pozytywnego myślały stereotypowo i ujawniały inklinację (*selective bias*) do strzelania do muzułmanów, podczas gdy osoby znajdujące się pod wpływem gniewu, były ostrożne i poszukiwały rzeczywistych (broń w ręku), a nie stereotypowych (turban lub hidżab) oznak zagrożenia. Podsumowując, można stwierdzić, że smutek sprawia, że nasza pamięć funkcjonuje lepiej, popełniamy mniej błędów poznawczych (jesteśmy bardziej realistyczni, dociekamy warunków koniecznych zdarzeń i pozostajemy odporni na subiektywne zniekształcenia sytuacji, np. błąd atrybucji, efekt halo), a w działaniu praktycznym trzymamy się zasad – np. zasady sprawiedliwości.

Niewykluczone, że główną przyczyną tego zjawiska jest motywacyjny potencjał emocji, który, jak twierdzi Frijda, decyduje o ich *differentia specifica*. Emocje o różnych znakach wywołują odmienny (asymetryczny) wpływ na procesy motywacyjne: te pozytywne wzbudzają tendencje do „zachowania pozytywnego afektu", a więc utrzymania *status quo*, które zwykle wymaga mniej poznawczego wysiłku niż motywowane emocjonalną „przykrością" dążenie do zmiany sytuacji. Przykładem działania mechanizmu asymetrii pozytywno-negatywnej jest zjawisko awersji do ryzyka (*risk-aversion*) lub jego poszukiwania (*risk-seeking*) opisane przez Tverskiego i Kahnemana (1979; 1992). Zgodnie z empirycznie opracowaną przez badaczy funkcją użyteczności, zmiany w zakresie strat są wartościowane silniej niż zmiany w zakresie zysków (po stronie strat funkcja użyteczności jest bardziej stroma niż po stronie zysków). Różnice w kształcie funkcji użyteczności pociągają za sobą wiele ludzkich inklinacji decyzyjnych. Nieproporcjonalny do wzrostu zysku przyrost satysfakcji sprawia, że ludzie są niechętni ryzyku: mając do wyboru pewny mały zysk lub zysk większy, lecz niepewny, skłonni są wybierać to pierwsze rozwiązanie. Natomiast dynamiczny wzrost funkcji użyteczności po stronie strat sprawia, że ludziom „opłaca się" podjąć ryzyko uniknięcia straty (nawet jeśli ceną niepowodzenia będzie większa strata), niż zostać pozbawionym sumy mniejszej, lecz z całą pewnością. Pozytywny efekt negatywności polega na tym, że w naturalny sposób motywuje ona ludzi do zmiany przykrej sytuacji. Wspomniane wcześniej prawo emocjonalnego zamknięcia pociąga za sobą zjawisko nazwane przez Frijdę „pierwszeństwem sterowania" (*control precedence*), które sprawia, że emocjonalne programy przeważają nad innymi interesami, celami czy działaniami (mają status „programu pilnego"), a w konsekwencji podporządkowują sobie sposób przetwarzania informacji. Dążenie do zmiany wymaga bardziej wnikliwego rozważenia warunków koniecznych do jej zrealizowania i lepiej obmyślanej strategii działania, co wymusza bardziej precyzyjny i bardziej realistyczny (głębiej zakorzeniony w obiektywnych właściwościach sytuacji) sposób myślenia.

Przy okazji badań nad pozytywną rolą emocji negatywnych warto pamiętać, że warunkiem racjonalności uczuć jest ich sytuacyjne uzasadnienie. Wyklucza to z dziedziny „dobroczynnych" emocji negatywnych wszelkie ich chorobliwe odmiany, takie jak patologiczna złość, kliniczny lęk czy depresja. Maria Lewicka (1993) słusznie zauważa zafałszowane podłoże depresyjnego realizmu; niewykluczone, że osoby depresyjne są odporniejsze na zjawisko iluzji kontroli (nie przypisują sobie sprawstwa zdarzeń, które zaszły w wyniku działania zewnętrznych sił), ponieważ mają nieadekwatny obraz samych siebie jako jednostek gorszych i mniej zaradnych, a więc z definicji w niedostateczny sposób wpływających na otoczenie. Ich rzekomy realizm ufundowany byłby zatem na subiektywnym zniekształceniu obrazu siebie i świata, który niewiele ma wspólnego z racjonalnością. Z takim stwierdzeniem zgodziłby się Forgas, który zdecydowanie podkreśla, że warunkiem pozytywnego efektu negatywności, dowodzonego przez jego badania, jest jedynie łagodny nastrój negatywny („*mild negative mood*" [Forgas, George, 2001]). Tezie o rzekomym smutku ludzi mądrych przeciwstawia się przekonanie o błyskotliwości osób szczęśliwych (wyrażane przekornym hasłem „*happier but smarter*" [Chuang, 2007]). Dowodzi się, że pozytywny afekt wpływa m.in. na twórcze i nowatorskie rozwiązywanie problemów, pobudza kreatywność, ułatwia radzenie sobie i zmniejsza obronność (Isen, 2005). Na koniec, odnosząc się do kwestii słuszności emocji, warto zauważyć, że innego rodzaju smutkiem lub gniewem jest taki, który wynika z niezadowolenia z niekorzystnej sytuacji własnej osoby, od tego, który motywowany jest przejęciem się cierpieniem innych ludzi (egoistyczny vs altruistyczny). Idea ta jest intuicyjna: gniew, który pojawiłby się w obliczu „pokrzywdzonych i bitych", nazwalibyśmy altruistycznym (mówi się wręcz o „świętym gniewie"), w przeciwieństwie do bezpodstawnego rozgniewania jakiegoś, przykładowo, samozwańczego dyktatora afrykańskiego państwa, który rządzi i działa „bez rozumu i według zachcianki" (św. Tomasz, 1984) (gniew egoistyczny i niesłuszny). Gniew czy smutek altruistyczny mógłby zostać nazwany szlachetnym o tyle, o ile zamiast dekadenckiej melancholii wiązałby się z poszukiwaniem rozwiązań tych problemów (np. innowacyjnych leków na nieuleczalne dotąd choroby); do takiego pozytywnego działania potrzeba jednak nie tylko dojrzałości emocjonalnej i intelektualnej siły, ale i sporej dawki pozytywnych emocji – optymizmu, twórczej odwagi i nadziei.

4. Pozytywny i negatywny wpływ emocji negatywnych. Konkretne realizacje typów emocji (*emotion tokens*)

W powyższych rozważaniach skupiliśmy się na typach emocji, próbując dowieść tezy – sprzecznej z obiegową opinią – że emocje negatywne mogą mieć, i zwykle mają, pozytywny wpływ na procesy decyzyjne. Teza ta jest w gruncie rzeczy bardzo intuicyjna, o ile emocje wyjaśnia się z perspektywy ewolucyjnej: jeśli emocje (w tym emocje negatywne) są pewnymi afektywno-behawioralnymi reakcjami ukształtowanymi przez dobór naturalny, to siłą rzeczy muszą mieć one, *generalnie rzecz biorąc*, tzn. ‘typowo’, a więc w przeważającej większości swoich konkretnych realizacji, pozytywne skutki decyzyjne, w przeciwnym bowiem razie nie zostałyby ‘zachowane’ przez procesy ewolucyjne. Teza o adaptywnym wpływie emocji negatywnych odnosi się jednak do *typów emocji*, to znaczy, implikuje, że *emocje określonego rodzaju mają pozytywny efekt, jeśli przybierają typowy, statystycznie dominujący kształt*. Nie oznacza to, oczywiście, że wszystkie ich realizacje mają pozytywny wpływ na procesy decyzyjne. Jest bowiem jasne, że emocje, w tym emocje negatywne, mogą w swoich konkretnych przejawach przybrać formę nietypową, nieracjonalną, to znaczy taką, iż zostałaby ona prawdopodobnie wyeliminowana przez dobór naturalny, gdyby była postacią typową, a więc statystycznie dominującą. Rozróżnienia na racjonalne (właściwe) i nieracjonalne (niewłaściwe) 'realizacje' (*tokens*) określonych typów emocji, a więc na racjonalne i nieracjonalne emocje doświadczane przez określone osoby w określonym czasie, dokonamy w oparciu o elementy struktury emocji. Jak pisaliśmy wcześniej, Frijda uważał, że emocje obejmują ocenę (sąd wartościujący), uczucie (zmiany psychofizjologiczne) oraz program działania. Ten strukturalny opis emocji warto uzupełnić, jak czyni to Nozick, o element przekonania na temat faktów. W zależności od tego, jaką teorię epistemologiczną się przyjmuje, przekonanie może być oceniane w kategoriach 'prawdziwe-fałszywe' lub 'uzasadnione-nieuzasadnione'. Sąd wartościujący może być trafny lub nietrafny. Uczucie (czyli pewne psychofizjologiczne pobudzenie) może być proporcjonalne lub nieproporcjonalne do oceny zawartej w sądzie wartościującym (por. Nozick, 1990, s. 87–98). Wreszcie, program działania może być nieadekwatny (działanie może być nieadekwatne względem uczucia i/lub sądu wartościującego). Otóż określona emocja (*emotion token*) jest *nieracjonalna*, jeśli zachodzi co najmniej jedna z następujących sytuacji: przekonanie jest fałszywe lub nieuzasadnione; sąd wartościujący jest nietrafny, tzn. nieadekwatnie odwzorowuje rzeczywistość w myśl wspomnianego wcześniej Arystotelesowskiego ‘emocjonalnego mimetyzmu’; uczucie jest nieproporcjonalne do oceny zawartej w sądzie wartościującym; konkretne działanie jest nieadekwatne w stosunku do uczucia i/lub sądu wartościującego[9]. Jest jasne, że emocja każdego typu może przybrać w swojej konkretnej ‘realizacji’ postać nieracjonalną. Dotyczy to zarówno emocji negatywnych (np. gniewu, strachu, smutku, winy, wstydu), jak i emocji pozytywnych (np. radości, miłości, wdzięczności). Jeśli ‘realizacje’ typów emocji są nieracjonalne, to ‘kierowane’ przez nie procesy decyzyjne są również nieracjonalne, to znaczy, zwykle prowadzą do rezultatów, które, w krótszej czy dłuższej perspektywie, są niekorzystne dla decydenta. ‘Realizacje’ typów emocji negatywnych jednak nie muszą być nieracjonalne. Co więcej, jak argumentowaliśmy, emocje te w przeważającej liczbie przypadków są racjonalne, to znaczy, oparte na prawdziwym opisie faktów, trafnym sądzie wartościującym i proporcjonalnej reakcji psychofizjologicznej oraz behawioralnej. Gdyby bowiem było inaczej, typy emocji, których są egzemplifikacjami, nie stanowiłby naszego, ukształtowanego przez procesy ewolucyjne, psychologicznego ‘wyposażenia’.

[9] Por. np. wspomniany wcześniej, pochodzący od Frijdy, przykład ogólnej, długofalowej irytacji, dalece wykraczający poza złość spowodowaną jej bezpośrednią przyczyną.

5. Zakończenie

Prawdopodobnie wszystkie typy emocji, jakich możemy doświadczać, mają w większości swoich konkretnych ‘realizacji’ pozytywny wpływ na nasze procesy decyzyjne (wyjątkiem jest, być może, emocja zawiści). Podstawowe uzasadnienie tej tezy opiera się na biologii ewolucyjnej. Jeśli jednak teza ma tak solidne uzasadnienie naukowe, można zasadnie zapytać, dlaczego wedle obiegowej opinii, którą przywołaliśmy na początku artykułu, negatywne emocje mają negatywny, a nie pozytywny, wpływ na nasze procesy decyzyjne. Nasuwa się trojaka odpowiedź na to pytanie. Po pierwsze, teza ta może jawić się przy powierzchownej analizie jako paradoksalna: mogłoby się bowiem wydawać, że emocje negatywne, a więc emocje doświadczane *jako przykre*, powinny mieć *negatywny* wpływ na nasze procesy decyzyjne. Takie rozumowanie jest jednak właśnie powierzchowne, nie ma ono żadnego głębszego uzasadnienia: polega na ‘przeniesieniu’, na zasadzie niejako automatycznego skojarzenia, ‘znaku’ emocji na cały skutek procesu kierowanego przez tę emocję. Po drugie, wydaje się, że za obiegową opinią może stać także tendencja naszej pamięci, by zachowywać we wspomnieniu wyraźniej zdarzenia negatywne, np. sytuacje, w których emocje negatywne (np. gniew) wywołały działanie, którego później żałowaliśmy, niż zdarzenia pozytywne, np. sytuacje, w których negatywne emocje miały w mniej lub bardziej odległej perspektywie konsekwencje pozytywne. Wreszcie, może jest też i tak, że nasza skłonność do negatywnej oceny wpływu negatywnych emocji na nasze zachowania wynika z błędnej opinii na temat tego, co mogłoby się stać, gdybyśmy potrafili w danej sytuacji stłumić emocje i działać ‘na chłodno’, to znaczy wynika stąd, że znamy nie całkiem zadowalające skutki działania pod wpływem negatywnych emocji (np. gniewu), i sądzimy błędnie, że działanie ‘na chłodno’ miałoby skutki dużo lepsze (podczas gdy w rzeczywistości miałoby skutki jeszcze mniej zadowalające). Żadne z tych trzech wyjaśnień nie wyklucza pozostałych. Powtórzmy jednak na zakończenie: w obiegowej opinii jest element prawdy – negatywne emocje mogą mieć skutki negatywne. Takie skutki jednak, wbrew tej opinii, nie są regułą, lecz wyjątkiem: *są atypowe*.

Bibliografia

Alloy, L., Abramson, L., 1979. Judgment of contingency in depressed and nondepressed students: Sadder but wiser? *Journal of Experimental Psychology*, *108*, s. 441–448.

Arystoteles, 1996. *Etyka nikomachejska*. Tłum. D. Gromska. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.

Clore, G.L., 2012. *Ile procesów poznawczych potrzeba do wzbudzenia emocji*? W: P. Ekman, R.J. Davidson, (red.), *Natura emocji*. Tłum. B. Wojciszke. Sopot: Gdańskie Wydawnictwo Psychologiczne, s. 159–169.

Chuang, S., 2007. Sadder but wiser or happier but smarter? A demonstration on judgement and decision making. *The Journal of Psychology*,*141/1*, s. 63–76.

Damasio, A., 2002. *Błąd Kartezjusza. Emocje, rozum, ludzki mózg*. Tłum. M. Karpiński. Poznań: Dom Wydawniczy Rebis.

Elster, J., 1979. *Ulysses and the sirens. Studies in rationality and irrationality*. Cambridge University Press.
Forgas, J.P., 2011. The upside of feeling down: The benefits of negative mood for social cognition and social behaviour. *Sydney Symposium of Social Psychology*.
Forgas, J.P., East, R., 2008. On being happy and gullible: mood effects on scepticism and the detection of deception. *Journal of Experimental Social Psychology*, *44*, s. 1362–1367.
Forgas, J.P., Goldenberg, L., Unkelbach, C., 2009. Can bad weather improve your memory? A field study o fmood effects on memory in a real-life setting. *Journal of Experimental Social Psychology*, *54*, s. 254–257.
Forgas, J.P., Vargas, P., Lahm, S., 2005. Mood effects on eyewitness memory: affective influences on susceptibility to misinformation. *Journal of Experimental Social Psychology*, *41*, s. 574–588.
Forgas, J.P., George, J.M., 2001. Affective influences on judgements and behaviour in organizations: An information processing perspective. *Organizational Behaviour and Human Decision*, *86*, s. 3–34.
Forgas, J.P., 1995. Mood and judgment. The Affect Infusion Model (AIM). *Psychological Bulletin*, *17*, s. 39–66.
Frank, R., 1988. *Passions within reasons. The strategic role of emotions*. New York: W.W. Norton & Company.
Frijda, N., 2012. Różnorodność afektu: emocje i zdarzenia, nastroje i sentymenty. W: P. Ekman, R.J. Davidson, (red.), *Natura emocji*. Tłum. B. Wojciszke. Sopot: Gdańskie Wydawnictwo Psychologiczne.
Frijda, N., 1989. Prawa emocji. *Nowiny Psychologiczne*, *61/2*, s. 24–49.
Gabrielsson, A., 2009. The relationship between musical structure and perceived expression. W: S. Hallam, I. Cross, M. Thaut (red.), *The Oxford handbook of music psychology*. Oxford: Oxford University Press, s. 141–150.
Greenspan, P., 2000. Emotional strategies and rationality. *Ethics*, *4*, s. 468–487.
Heller, M., 2010. Znaczenie znaczenia. W: M. Heller, J. Życiński, *Pasja wiedzy. Między nauką a filozofią*. Kraków: Petrus.

Isen, A., 2005. Pozytywny afekt a podejmowanie decyzji. W: M. Lewis, J.M. Haviland-Jones (red.), *Psychologia emocji*. Tłum. M. Kacmajor *et al*. Gdańsk: Gdańskie Wydawnictwo Psychologiczne, s. 527–549.

Isen, A.M., Clark, M.S., 1982. Toward understanding the relationship between feeling states and social behaviour. W: A.M. Isen, A.H. Hastorf (red.), *Cognitive social psychology*. New York: Elsevier, s. 73–108.

Izard, C.E., 2012. Procesy poznawcze stanowią jeden z czterech typów systemów wzbudzających emocje. W: P. Ekman, R.J. Davidson, (red.), *Natura emocji*. Tłum. B. Wojciszke. Sopot: Gdańskie Wydawnictwo Psychologiczne, s. 179–183.

Kahneman, D., 2012. *Pułapki myślenia. O myśleniu szybkim i wolnym.* Tłum. P. szymczak. Poznań: Media Rodzina.

Kant, I., 1964. *Krytyka władzy sądzenia.* Tłum. A. Landman. Państw. Wydaw. Naukowe: Warszawa.

Kopaliński, W., 1999. *Słownik wyrazów obcych i zwrotów obcojęzycznych.* Warszawa: Muza S.A.

Langer, S., 1942. *Philosophy in a new key.* Cambridge: Harvard University Press.

Lewicka, M., 1993. *Aktor czy obserwator. Psychologiczne mechanizmy odchyleń od racjonalności w myśleniu potocznym.* Warszawa – Olsztyn: Polskie Towarzystwo Psychologiczne.

Nussbaum, M., 2001. *Upheavals of thought: The intelligence of emotions.* Cambridge: Cambridge University Press.

Nozick, R., 1990. *The examined life: Philosophical meditations.* New York: Simon & Schuster.

Platon, 1984. *Eutyfron.* Tłum. W. Witwicki. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.

Reisenzein, R., Schoenplung, R., 1992. Stumpf's cognitive-evaluative tehory of emotion. *American Psychologist*, *47*, s. 34–45.

Seligman, M., 2005. Psychologia pozytywna. E: J. Czapiński (red.), *Psychologia pozytywna. Nauka o szczęściu, zdrowiu, sile i cnotach człowieka.* Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.

Skarga, B., 1983. Trzy idee racjonalności. *Studia Filozoficzne*, *5–6*, s. 39–56.

Slovic, P., Finucane, M.L., Peters, E., MacGregor, D.G., 2002. Rational actors or rational fools? Implications of affect heuristic for behavioural economics. *Journal of Socio-Economics*, *31*, s. 329–342.

Tan, H.B., Forgas, J,P., 2010. When happiness makes us selfish, but sadness makes us fair: Affective influences on interpersonal strategies in the dictator game. *Journal of Experimental Social Psychology*, *46/3*, s. 571–576.

Tokarz, A., 2005. *Dynamika procesu twórczego*. Kraków: Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego.

Św. Tomasz z Akwinu, 1984. O władzy [De regno]. W: tegoż, *Dzieła wybrane*. Tłum. i oprac. J. Salij OP. Poznań: W Drodze.

Tversky, A., Kahneman, D., 1992. Advances in prospect theory: cumulative representation of uncertainty. *Journal of Risk and Uncertainty*, *5*, s. 297–323.

Tversky, A., Kahneman, D., 1979. Prospect theory: An analysis of decision under risk. *Econometrica*, *47/2*, s. 263–291.

Unkelbach, C., Forgas, J.P., Denson, T.F., 2008. The turban effect: The influence of Muslim headgear and induced affect on aggressive responses in the shooter bias paradigm. *Journal of Experimental Social Psychology*, *44*, s. 1409–1413.

Węgrzecki, A., 1990. O irracjonalności uczuć. *Zeszyty Naukowe Akademii Ekonomicznej w Krakowie*, s. 5–16.

Wierzbicka, A., 1999. *Emotions across languages and cultures: diversity and universals.* Cambridge: Cambridge University Press.

Zajonc, R.B., 1980. Feeling and thinking: Preferences need no inferences. *American Psychologist*, *35*, s. 151–175.

"Internal" Problems of Normative Theories of Thinking and Reasoning

Piotr Urbańczyk
Copernicus Center for Interdisciplinary Studies,
Pontifical University of John Paul II, Department of Philosophy

Abstract

This paper provides moderate criticism of so-called normative theories of thinking and reasoning. The discussion focuses on the problems of idealization, adequacy, inconsistent yet non-trivial logics, logical omniscience etc. I called them "internal" to the normative approach, because they stem from the very properties of formal systems used to model these two human activities. Some arguments, however, refer to the current theories in cognitive science, including those which are developed within "descriptive" framework.

Keywords

normative theories of thinking and reasoning, logic, probability theory, rational choice theory

1. Introduction

Normative theories of thinking and reasoning (later: NTTR) have been developing for centuries. Moreover, such theories have been a starting point for research on thinking and reasoning carried out within contemporary cognitive science. These theories provided the theoretical framework allowing to conceptualize or even operationalize the notions of thinking and reasoning. They have also been treated as a source of research hypotheses about the nature of these two processes. Nowadays, the normative approach is not a popular one. For example, in *Oxford Handbook of Thinking and Reasoning* published in 2013 only one out of forty chapters is devoted to normative theories. In contemporary literature they serve rather as a "strawman" or at least as a counterexample or suitable background for presenting theories of different kind (descriptive ones).

In this paper, I would like to present some problems besetting NTTR. In the presentation of these theories (section 2) I will follow the article of Chater and Oaksford (2012) published in the *Oxford Handbook*. Some ideas included therein will also appear in the last section of this study. Nevertheless, the main part of this paper is the discussion (section 3). Arguments presented in this paper concern problems resulting from the use of formal tools in normative approach. These problems arise from the very structure of normative theories and from the mode of explanation that such theories adopt. For this reason, these problems are called "internal".

2. Normative theories of thinking and reasoning

The basic difference between normative and descriptive theories of thinking and reasoning (later: DTTR) is the approach used to describe these processes. Normative theories try to determine how people *ought to* think or how reasoning *should* be carried out. On the other hand, the goal of descriptive theories of thinking and reasoning is to investigate a real nature of these processes – what they *really* are and how they are *actually* carried out. (In other words, descriptive theories aim to provide a *description* of thinking and reasoning.) While the former approach is most commonly associated with process of reasoning being modeled directly within certain formal system (e.g., logical calculus, probability theory or rational choice theory), the latter utilizes the *aparatus* of natural sciences – one builds a model, which is then subjected to the test of empirical research.

The main claim of Chater and Oaksford (2012) is that formal systems utilized in normative approaches impose on thinking the condition of consistency – logic demands the consistency of *beliefs*; probability theory imposes this requirement on the *degree* of beliefs; finally, rational choice theory requires our *choices* not to be contradictory.

2.1. Logic

Some scholars try to model thinking directly within a logical calculus, most often classical logic. The main condition imposed by classical logic onto a set of beliefs is that the set of beliefs should be consistent. Let us use the toy example – it seems to be incorrect to hold the following three beliefs simultaneously:

(1) All bullfrogs are sophisticated.
(2) Jeremiah is a bullfrog.
(3) It is not true that Jeremiah is sophisticated.

All bullfrogs are sophisticated, so Jeremiah is as well, since he is a bullfrog. Yet proposition (3) stands in contradiction with this conclusion. Logic provides formal language and strict methods of conducting such reasoning. Below the above reasoning is formalized in classical predicate calculus.

(1*) $\forall x(B(x) \rightarrow S(x))$
(2*) $B(a)$
(3*) $\neg S(a)$
(4) $B(a) \rightarrow S(a)$ $\forall$ elimination (1)
(5) $S(a)$ *Modus Ponens* (4),(2)
contradiction

Where $\forall$ means *for all*, $\rightarrow$ stands for *if..., then...*, variable x represents objects of the universe of discourse, whereas a is an individual name and stands in our case for Jeremiah. Predicate letters B and S mean respectively *is a bullfrog* and *is sophisticated*. Formula (4) is produced by the rule of universal quantifier elimination applied to formula (1). Formula (5) is produced by *Modus Ponens* applied to formulas (4) and (2). If someone holds above three beliefs, she has a pair of two contradictory sentences incorporated into set of her beliefs – $S(a)$ and $\neg S(a)$. We can define inconsistent systems in the fallowing way:

Defintion 1 *Let T be a deductive system whose language has a symbol for negation. T is said to be inconsistent if the set of its theorems contains at least two formulas or sentences, one of which is the negation of the other; otherwise T is consistent.*

In classical propositional calculus, a coherence condition is expressed by the law of (non)contradiction.

$$\neg(p \wedge \neg p)$$

But why (classical) logic does not allow contradiction? In inconsistent systems, i.e. in systems in which a pair of two contradictory formulas has been asserted, any proposition can be proven. Systems, in which anything can be proven are called trivial.

Defintion 2 *T is called trivial if the set of its formulas (or sentences) coincides with the set of its theorems; otherwise T is called non-trivial.*

The inference leading from contradiction to any proposition is captured by the law of explosion (other names: *ex contradictione quodlibet*, the principle of Duns Scotus).

$$p \wedge \neg p \rightarrow q$$

or

$$p \rightarrow (\neg p \rightarrow q),$$

where q is an arbitrary proposition. If we consider a logically closed set of believes containing two contradictory sentences, we have to admit that it contains also all sensible statements that are possible to express in given language.

2.2. Probability

The logic can be understood as a tool used to indicate that belief system is (not) contradictory. Nevertheless, the "all or nothing" strategy is often not applicable to the acquisition or keeping of a belief. Sometimes we keep a belief that we are not quite certain of, or acquire a belief from a source not fully dependable or trustworthy. Thus, we may assign some *degrees* to a belief. How to understand them? One can try to define the degree of a belief as the *probability* that this belief is true. Therefore, the proper formal calculus to explore the coherence of degrees of beliefs is probability theory. In cognitive science this approach is called Bayesian, since Thomas Bayes is the author of the most famous theorem concerning conditional probability of an event.

The basic version of Bayes' Theorem follows directly from the definition of conditional probability

$Pr(A|B)$ is the probability that A is true under the condition that B is true.

The probability that both beliefs are true, $Pr(A,B)$ is equal to both the probability that B is true, $Pr(B)$ multiplied by the $Pr(A|B)$ and vice versa – the probability that A is true multiplied by $Pr(B|A)$.

$$Pr(A,B) = Pr(B)Pr(A|B) = Pr(A)Pr(B|A)$$

From this equation Bayes' theorem can be obtained.

$$Pr(B|A) = \frac{Pr(A|B)Pr(B)}{Pr(A)}$$

Shortly speaking, Bayes' theorem allows to calculate unknown probability from the known probabilities. It is often used in contemporary attempts to model knowledge in artificial intelligence, cognitive science or even linguistics.

From the point of view of the theories of thinking and reasoning logic can be understood as a framework imposing a condition of consistency on beliefs, while the probability theory imposes this condition on the degree of belief. To what extent can we impose similar condition on the choices we made? Proper formal framework that cope with this kind of questions is rational choice theory.

According to rational choice theory, rationality or irrationality of beliefs can not be assessed out of context. It may seem bizarre to choose presentation at the conference (P) over the holiday (H), but it is not irrational. Nevertheless, there is something odd in choosing P, when $\{P,H,D\}$ is offered, while choosing H from the set of options $\{P,H\}$ lacking the third "decoy" option. To exclude this pattern of behavior rational choice theory introduces *contraction* condition. Similarly, it seems unreasonable to choose P, when $\{P,H\}$ or $\{P,D\}$ is offered, while not choosing P from all three options $\{P,H,D\}$. The *expansion* condition is introduced to rule out this type of pattern.

If the above conditions are met, there is a preference relation "at least as good as" over the set of choices, which means that any choice is at least as good as any other items in the set of choices. If this preference relation is transitive (if X is at least as good as Y and Y is at least as good as Z, then X is at least as good as Z), then it is an ordering. This relation orders the set of our options with the one that will bring the least benefit at the beginning and most favored options at the end. This way we can formulate a simple rational choice criterion – from the set of options choose the one that will bring you most benefit.

Rational choice theory is still being developed. It may be made more complicated by adding the probability of obtaining benefits or imposing additional conditions on our choices. Then the criterion given above changes to the criterion of maximizing expected benefits, but the essence of the theory remains the same. Probably one of the most important extensions of rational choice theory is game theory, in which one's choices depend on the choices of other participants of the game.

3. Discussion

Normative approach to modeling thinking and reasoning is a source of many problems. In the title of this work I called them "internal", because they stem from the very properties of formal systems. Some arguments presented here refer to the results of cognitive science, including those which are based on descriptive theories of thinking and reasoning.

3.1. The problem of idealization

The first and obvious problem that normative theories face is a problem of excessive idealization, which is done during the attempts to formalize beliefs and reasoning. Formal systems utilize certain language and the price for the accuracy it offers is the loss of the enormous realm of content included in natural language (and even greater realm of content, to which we have access through what we call thinking).

3.2. The problem of adequacy

System of beliefs can be formalized using a number of different languages and the structure of reasoning may be expressed utilizing many different operators of logical consequence. In other words, there is no single logic, but there is a whole *continuum* of them. The sole use of classical logic (even in its predicate version) is not uncontroversial and nonclassical calculi are variform to the extend that it rises the problem of adequacy of utilizing tools. If we assume that people do not follow the law of the excluded middle, we can use intuitionistic logic. If we believe that additional conditions may invalidate the conclusions drawn earlier, we use one of the non-monotonic logics. Our beliefs often contain so-called propositional attitudes, i.e. phrases indicating cognitive attitude of a subject to the given proposition. They are elements of the class of phrases called modalities. Formal calculi that deal with modalities are modal logics. There are deontic modal logic used to capture reasoning about moral permissibility and obligation, alethic modal logic for reasoning about possibility and necessity *etc.* Shortly speaking, the variety of logics is very great. Having different logics is helpful as each of them captures complementary aspect of the structure of thinking and reasoning. Even though the application of a particular logic to model specific resoning is well justified, it is still vulnerable to the accusation of being inadequate.

3.3. Logical calculi that allow contradictions

Classical logic (as well as most non-classical ones) does not permit belief system to be inconsistent. This kind of calculi do not distinguish between inconsistency and triviality of the system. This means that systems developed within this formal framework are trivial if and only if they are inconsistent. Nevertheless, there is a whole group of logics that allows contradictions within the body of beliefs. The logical calculus that copes with inconsistent yet non-trivial systems is paraconsistent logic.

In a broad sense paraconsistent logic is built by limiting the scope of the law of contradiction:

$$\neg(p \land \neg p).$$

Paraconsistent logic has been developed since the beginning of the twentieth century. One of its precursors was Jan Łukasiewicz. In the monograph *On the Principle of Contradiction in Aristotle* (Łukasiewicz, 1971) he distinguishes between three kinds of this principle: logical, metaphysical and psychological one. The latter reads:

> No one can believe that the same thing can (at the same time) be and not be. (Aristotle, n.d., G 3, 1005 b 23-26)

> Two acts of believing which correspond to two contradictory propositions cannot obtain in the same consciousness. (Łukasiewicz, 1971, p. 488)

For our discussion, it is important that according to Łukasiewicz psychological law of contradiction does not hold. The experience of our everyday life indicates that in certain situations people can hold contradictory beliefs.

Chronologically, the first paraconsistent calculus was the discursive logic created by Stanislaw Jaśkowski. (His motivation was to create the logic suitable to formalize the discussion, which often contains contradictory claims of the opponents). However, paraconsistent logic gained its reputation only in the 1950s, thanks to the works of Newton da Costa. Since then, it has been rapidly developed. There are several different paraconsistent calculi. Probably, the most popular today is relevant logic of Graham Priest and Richard Routley.

3.4. Logical calculi are “static”

All logical calculi mentioned above are static and are unable to capture the dynamics of the acquisition and rejection of beliefs. Let us return to the example with an individual holding the following three beliefs:

(1*) $\forall x(B(x) \rightarrow S(x))$,
(2*) $B(a)$,
(3*) $\neg S(a)$.

Suppose that she realized that her belief system contains a pair of contradictory propositions – “Jeremiah is a sophisticated” and its negation. What can she do in this situation? Of course, she may claim that her belief system is paraconsistent, but let us assume additionally that she does not feel good with contradictions. In that case, she may simply reject belief (3). She may also discard belief (2) and state that Jeremiah is not a bullforg, but – for example – a green tree frog. Finally, she may reject the general claim about the sophistication of bullfrog species (1) or state that Jeremiah is so unique that the general rule should take the form of:

(1**) $\forall x(B(x) \wedge x \neq a \rightarrow S(x))$, None of the logical calculi can indicate, which way out of the ones mentioned above is the best[1].

3.5. The problem of assessing the degree of beliefs and ordering the choices

Similar problems beset all attempts to formalize thinking and reasoning in terms of probability theory and the rational choice theory. Moreover, in the case of these formalisms, there are other issues that I will only signal here. One of them is the fact that it is not possible to assess the strength with which one holds a belief. It is hard to even introspectively determine the exact degree of one's own beliefs. The degree of a belief probably varies depending on the situation in which one find herself, the time, the amount of information she has and the context. Similarly, it is hard to assess all the benefits that our choices can bring, thus organize them in one scale. Furthermore, when all given options can bring equal benefit, the criterion of rational choice theory is not applicable.

[1] However, there is some formal tool that can be helpful in these situations – it is Belief Revision Theory, sometimes called AGM, because of its authors Carlos Alchourrón, Peter Gärdenfors and David Makinson. The main principle of AGM is the minimal change principle. It means that the change in belief system shall lead to the loss of as few previous beliefs as possible. Anyway, AGM is not a logical calculus *sensu stricto*.

3.6. Logical omniscience

The last issue I would like to address is the problem of deductive closure of the set of beliefs. In the set of beliefs contradiction can be hidden – a pair of contradictory propositions may not occur until a proper deduction is carried out. It seems that the claim that the set of beliefs is closed under the operations of logical consequence is too strong requirement for cognitive systems, at least for the human mind. For this reason, that kind of problems are often called the problems of logical omniscience.

Let us recall once again the toy example with sophisticated Jeremiah. In this case the inconsistency in the set of beliefs occurs indirectly. There is no doubt that the subject may be unintentionally, that is completely and absolutely, unaware of an implication which ultimately results in a contradiction withe others belief held. We are not logically omniscient – in the sense that we cannot immediately deduce all consequences that can be derived from a set of propositions. Anyone who demands such ability is clearly asking too much (da Costa, French, 1990, p. 185).

First of all, there are many trivial consequences of a given set of beliefs which would simply clutter up one’s mind if added to the set of beliefs held *explicite*[2]. Of course, whether an im-

[2] Assuming that one can by unaware of a belief held *explicite*, as Harman does (Harman, 1986, p. 14)

plied belief is deemed trivial or not depends on the context, but even non trivial implications might escape the human mind, since we are not omniscient even "locally" (da Costa, French, 1990, p. 185).

Sometimes it takes a complex and lengthy proof for one to become aware of certain implication of her belief system. Shortly speaking, the implications may not be obvious in any sense. It seems that such situations occur quite frequently. There are many examples of that, e.g., from the history of science, where certain logical consequences of a hypothesis where not perceived at given time and its later discovery contributed to its confirmation.

Of course, we can determine whether given implication is obvious or not in terms of length of the proof needed to derive it and the number of beliefs involved. Hence, one can say that success in detection of contradiction arisen from the set of belief depends on, i.a., logical competency of cognitive subject. Nevertheless, taking a very strong and unrealistic assumptions concerning logical competency of a cognitive subject it is estimated that consistency test for the very modest set of 138 beliefs would take longer than the current age of the universe (Cherniak, 1984).

4. Conclusions

Despite the above criticisms of normative theories of thinking and reasoning, it is clear that they are not irrelevant for the descriptive theories. NTTR are important for the DTTR for at least three reasons.

Firstly, they provide some theoretical framework needed to operationalize concepts of thinking and reasoning. They also determine what can be expected from thinking subject as well as what constitutes a successfully performed reasoning and what constitutes a failure. For example, if we want to investigate whether people reason deductively, we need first determine what the deduction is and this term belongs to logic and logical theories of reasoning.

Secondly, NTTR often serve as the starting point for the the descriptive theories. There is something more than a simple comparison to the normative theory. Many of them are built directly on the formal approaches, e.g., Johnson-Laird’s theory of mental models.

The third remark concerns the rationality with which people act in the world. It is hard to assign attribute of having mind to someone who moves or generates sentences in a completely random way. According to many philosophical accounts, in such situation one cannot say that such person has intentions, beliefs or goals. In a general sense, NTTR try to provide conditions that must be fulfilled by the action of the subject to be considered rational (cf. Chater, Oaksford, 2012).

References

Aristotle. (n.d.). *Metaphysics*.

Chater, N., & Oaksford, M., 2012. Normative systems: Logic, probability and rational choice. In: K.J. Holyoak, R.G. Morrison (Eds.), *The oxford handbook of thinking and reasoning.* New York: Oxford University Press.

Cherniak, C., 1984. Computational complexity and the universal acceptance of logic. *Journal of Philosophy*, *81*, pp. 739–758.

Christensen, D., 2004. *Putting logic in its place: Formal constraints on rational belief.* New York: Oxford University Press.

da Costa, N., French, S., 1990. Belief, contradiction and the logic of self-deception. *American Philosophical Quarterly*, *3*, pp. 179–197.

Harman, G. (Ed.), 1986. *Change in view. Principles of reasoning.* Cambridge: MIT Press.

Johnson-Laird, P.N. 2010. Mental models and human reasoning. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 107, no 43, pp. 18243–18250.

Johnson-Laird, P.N., 2009. Mental logic, mental models, and simulations of human deductive reasoning. In: R. Sun (Ed.), *The cambridge handbook of computational psychology*. New York: Cambridge University Press.

Lenzen, W., 1978. Recent work in epistemic logic. *Acta Philosophica Fennica*, *30*, pp. 1–219.

Łukasiewicz, J., 1971. On the principle of contradiction in Aristotle. *The Review of Metaphysics*, *24*, pp. 485–509.

Priest, G., 1998. What so bad about contradictions? *The Journal of Philosophy*, *9*, pp. 410–426.

Segerberg, K., 1999. Two traditions in the logic of belief: Bringing them together. In: H. Ohlbach, U. Reyle (Eds.), *Logic, language and reasoning*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Filozofia matematyki Wacława Sierpińskiego

Katarzyna Lewandowska
Uniwersytet Papieski Jana Pawła II w Krakowie, Wydział Filozoficzny

Sierpiński's philosophy of mathematics

Abstract

The main aim of the paper was to draw attention to Wacław Sierpiński as not only a great mathematician but also a philosopher. We undertook the attempt of reconstruction of Sierpiński's philosophy. To aim this goal we mainly based ourselves on Sierpiński's habilitation lecture entitled *The concept of correspondence in mathematics*. The complementation of Sierpiński's philosophical views were conclusions from his mathematical achievements, his scheme of research on The Axiom of Choice, and his attitude to this axiom.

Keywords

Wacław Sierpiński, philosophy of mathematics, Axiom of Choice, the concept of correspondence

Wacław Sierpiński był jednym z twórców polskiej szkoły matematycznej, kształcąc trzy pokolenia matematyków. Pośród szerokiego grona jego uczniów należy wymienić: Stanisława Ruziewicza, Ottona Nikodyma, Stefana Mazurkiewicza, Kazimierza Kuratowskiego, Bronisława Knastera, Stanisława Saksa, Kazimierza Zarankiewicza, Antoniego Zygmunda, Adolfa Lindenbauma, Karola Borsuka, Stefanię Braunównę, Edwarda Szpilrajn-Marczewskiego, Antoniego Wakulicza, Jerzego Browkina, Andrzeja Rotkiewicza i Andrzeja Schinzela. Polski matematyk, jako jeden z pierwszych na świecie, prowadził w 1909 roku na Uniwersytecie Lwowskim wykłady z teorii mnogości. W 1912 r. wydał piąte w porządku chronologicznym syntetyczne ujęcie teorii zbiorów: *Zarys teorii mnogości* (Sierpiński, 1928).

Aksjomat wyboru[1] jest zagadnieniem, którego nie sposób pominąć zajmując się teorią mnogości, nawet jeśli tylko pobieżnie dotykamy kwestii teorii zbiorów. Śmiało możemy go uznać za najbardziej interesujący i zarazem najbardziej kontrowersyjny aksjomat w dziejach matematyki. Jest jednym z najintensywniej badanych postulatów matematyki współczesnej. Określa się go,

[1] W niniejszej pracy używamy zamiennie określeń aksjomat wyboru, pewnik wyboru, aksjomat Zermela, zasada wyboru oraz skrótu AC. Dla lepszej przejrzystości naszych rozważań, przypominamy, iż aksjomat wyboru najczęściej formułuje się w następującej postaci: *Niech* $\Im \neq \emptyset$ *oraz* $\{X_j\}_{j \in \Im}$ *będzie rodziną niepustych zbiorów, wówczas istnieje odwzorowanie* $\tau : \Im \to \bigcup_{j \in \Im} X_j$ *takie, że* $\tau(j) \in X_j$ *dla każdego* $j \in \Im$.

jako drugi po V aksjomacie Euklidesa, najciekawszy, najmocniej krytykowany i najbardziej płodny aksjomat[2].

Nie dziwi zatem fakt, iż także Wacław Sierpiński, zajmując się teorią mnogości, nie mógł przejść obojętnie obok frapującej matematyków i filozofów zasady wyboru. Polski matematyk na arenę zmagań toczonych wokół aksjomatu wyboru nieprzerwanie od 1904 roku wkroczył około 1916 roku i uczynił aksjomat Zermela centrum swoich wieloletnich i wieloaspektowych badań. Co więcej, okazuje się, że dokonał on zasadniczego przełomu[3] w badaniach nad aksjomatem wyboru. Ponadto, prowadzone przez Sierpińskiego, czysto matematyczne badania teoriomnogościowe doprowadziły do wykrystalizowania się pewnych istotnych tez *stricte* filozoficznych.

[2] Powyższe określenia aksjomatu wyboru, pochodzące od różnych autorów, można znaleźć między innymi w (Herrlich, 2006).

[3] Podkreślmy w tym miejscu, iż Sierpiński u początku swoich badań nad aksjomatem wyboru (zasadniczo od 1916 roku do początku lat trzydziestych dwudziestego wieku) nie był w posiadaniu technicznych możliwości, by dokonać innego zasadniczego przełomu w debacie nad AC – wykazania faktu, iż zasada wyboru nie usprzecznia obowiązującego wówczas zestawu pozostałych aksjomatów teorii mnogości oraz jest od nich niezależna. Tym niemniej Sierpiński i jego zwolennicy, przed rozstrzygnięciem tych kwestii (wzmiankowanych już wyżej), pracowali w głębokim przekonaniu, iż pewnika wyboru nie da się wyprowadzić z innych aksjomatów teoriomnogościowych i nie generuje on sprzeczności w matematyce. Za powyższym świadczy między innymi fakt, iż podjęli oni szerokie badania nad różnymi wariantami postulatu Zermela i ich istotnym wpływem na kształt uprawianej matematyki (zależnej od tego, którą z wersji pewnika wyboru przyjmujemy).

Całość dokonań polskiego matematyka (na polu debaty wokół zasady wyboru) możemy podzielić na cztery kolejne etapy wyróżniające jego badania. Po pierwsze, Sierpiński uporządkował filozoficzne spory wokół pewnika wyboru – opierając się na wnikliwej analizie samej jego istoty, usystematyzował dotychczasowe stanowiska w sporze o AC. Następnie, odsunął na boczny tor swoich rozważań podstawowe kwestie filozoficzne generowane przez pewnik wyboru. Po trzecie, stworzył czysto matematyczny program badań aksjomatu Zermela, którego realizacja umożliwiała poznanie jego sensu i roli jako postulatu matematycznego. Ostatecznie, schemat wypracowany przez Sierpińskiego zmienił dalsze badania pewnika wyboru oraz wytyczył nowy kierunek w toczonej wokół AC debacie, nadając jej samej matematyczny charakter.

Dokonania polskiego matematyka możemy śmiało określić mianem przełomowych. Oryginalność i doniosłość jego wyników wyraziły się przede wszystkim wywarciem istotnego wpływu na sposób prowadzenia późniejszych badań pewnika wyboru, choć nie tylko. Program wypracowany przez Sierpińskiego przyczynił się także istotnie do powstania nowych nurtów w filozofii matematyki i pewnego rodzaju modyfikacji spojrzenia na pracę matematyka w ogóle. Szczególnie zaś mocno, przynajmniej w pewnych kręgach, dokonania Sierpińskiego odcisnęły piętno na sposobie pojmowania teorii mnogości i wpłynęły na jej dynamiczny rozwój.

Głównym zaś celem niniejszej pracy jest przedstawienie rekonstrukcji filozofii matematyki Wacława Sierpińskiego. W naszych analizach opieramy się w głównej mierze na wykładzie habilitacyjnym wygłoszonym przez polskiego matematyka w 1908 roku, zatytułowanym *Pojęcie odpowiedniości w matematyce* (Sierpiński, 1909). Swoiste zaś dopełnienie poglądów Sierpińskiego będą stanowiły wnioski płynące z analizy jego matematycznych dokonań, wprowadzonego programu badań aksjomatu wyboru oraz przyjmowanej postawy wobec zasady wyboru[4].

1. Wykład habilitacyjny Sierpińskiego

Zwróćmy najpierw uwagę na znamienny fakt, iż na materię wykładu habilitacyjnego wybrał Sierpiński zagadnienie z filozofii matematyki. Widzimy zatem, że rzeczywiście kwestie filozoficzne od samego początku drogi naukowej były polskiemu matematykowi bliskie i ważne. Sierpiński nie bał się poruszać spornych tematów z filozofii matematyki i zdawał sobie sprawę z faktu, iż wiele zagadnień czysto filozoficznych jest istotnych dla całokształtu matematyki i dlatego należy je znać i rozważać.

Celem wykładu habilitacyjnego Sierpińskiego było zaprezentowanie znaczenia i roli, jaką odgrywa pojęcie odpowiedniości w matematyce. Sierpiński w swoim wykładzie nie podał *explicite* definicji odpowiedniości. Dokonał raczej charakterystyki

[4] Podstawą przedstawionych w niniejszej pracy wyników jest analiza prac Wacława Sierpińskiego, skoncentrowanych na aksjomacie wyboru: (Sierpiński, 1918), (Sierpiński, 1916), (Sierpiński, 1928) oraz (Sierpiński, 1921).

tego pojęcia, poprzez wskazanie jego roli w matematyce. Wydaje się, iż Sierpiński używał pojęcia odpowiedniości czysto intuicyjnie, utożsamiając je z pewnego rodzaju przyporządkowaniem, relacją lub po prostu funkcją[5].

Już na samym wstępie wykładu Sierpiński podkreślał, że pojęcie odpowiedniości jest jednym z najważniejszych pojęć w matematyce:

> Przenika ono wszystkie dziedziny myśli matematycznej; jest podstawą, na której budujemy inne zasadnicze pojęcia; jest źródłem wszystkich najwspanialszych pomysłów (Sierpiński, 1909, s. 8).

Przypisując odpowiedniości istotną wagę w uprawianiu matematyki, Sierpiński powoływał się na Henri'ego Poincarégo, według którego matematycy nie badają przedmiotów lecz *de facto* zależności między nimi i co więcej, mogą swobodnie zastępować dane przedmioty innymi, z zastrzeżeniem zachowania danej zależności[6].

---

[5] *Pojęcie funkcji takie, jakie zdefiniowaliśmy wyżej [standardowe określenie funkcji jako przyporządkowanie między dwoma zbiorami spełniające określone warunki – K.L.] jest bardzo ogólne; w gruncie daje się ono sprowadzić do odpowiedniości między dwoma zbiorami* (Sierpiński, 1909, s. 19).

[6] *Les mathématiciens n'étudient pas des objets, mais des relations entre les objets; il leur est donc indifférent de remplacer ces objets par d'autres, pourvu que les relations ne changent pas* (Poincaré, 1902, s. 32).

Dla polskiego matematyka odpowiedniość odgrywała istotną rolę w szeroko rozumianej matematyce, przede wszystkim ze względu na jej znaczenie dla:

- praktycznych zastosowań matematyki; bez odpowiedniości nie ma w ogóle sensu mówić o aplikacji pojęć i obiektów matematyki do rozważań nauk praktycznych; nie ma sensu mówić o matematycznym modelowaniu danego zagadnienia;
- teoretycznych rozważań w tworzeniu matematyki (zob. Sierpiński, 1909, s. 8).

Wymienione przez Sierpińskiego zastosowania odpowiedniości generowały bardzo istotne zagadnienia filozoficzne. Mowa tu przede wszystkim o kwestii zależności między matematyką czystą a matematyką stosowaną oraz o szerokim zagadnieniu matematyczności świata fizycznego. Sierpiński w swoim wykładzie starał się odpowiedzieć na pytanie, dlaczego matematyka, będąca nauką czysto abstrakcyjną, ma bardzo liczne zastosowania w naukach fizycznych. Według niego akceptowalnym wytłumaczeniem mogłoby być istnienie pewnego istotnego związku między pojęciami matematycznymi a obiektami świata realnego:

> Na zakończenie zaznaczę tylko, iż fakt, że nauka, tak oderwana, jaką jest matematyka, znajduje tyle zastosowań realnych, wytłumaczyć daje się istnieniem doskonałej odpowiedniości między

> dziedziną abstrakcji a dziedziną realnej rzeczywistości (Sierpiński, 1909, s. 19).

Sierpiński wprowadził tym samym bardzo radykalną tezę filozoficzną. Orzekł on, iż istnieje pewnego rodzaju ścisła odpowiedniość między strukturą świata realnego a matematyką. Aby to przypisanie było możliwe, rzeczywistość fizyczna musi mieć pewną kluczową cechę, którą za Michałem Hellerem możemy współcześnie nazwać racjonalnością matematyczną. Świat fizyczny w swych najgłębszych fundamentach musi być matematyczny, skoro odpowiada mu struktura świata matematyki.

Rozważając powyższe kwestie, twórca polskiej szkoły matematycznej zwracał także uwagę na fakt, iż w praktycznych zastosowaniach matematyki kluczową rolę odgrywa samo pojęcie odpowiedniości. Właśnie dzięki stosowaniu odpowiedniości możemy świat realny opisywać i badać za pomocą matematyki:

> Śmiało rzec można, że całe praktyczne znaczenie matematyki zawdzięczamy stosowaniu pojęcia odpowiedniości (Sierpiński, 1909, s. 8).

Drugi filozoficzny aspekt rozważań Sierpińskiego był związany z teoretycznymi zastosowaniami odpowiedniości. Zdaniem polskiego uczonego, skoro pyta się jak odpowiedniość wpływa na kształt matematyki, to wchodzi się na obszar metodologii matematyki. Stawia się więc – między innymi – pytanie: jak powstaje matematyka? Właśnie temu zagadnieniu Sierpiński poświęcił w głównej mierze swój wykład. Chciał podkreślić teoretyczne znaczenie i rolę, jaką odpowiedniość odgrywa w samej matematyce jako takiej. Aby w pełni móc docenić wagę odpowiedniości, należy najpierw określić, czym jest odpowiedniość doskonała i na czym dokładnie polega jej zastosowanie w kształtowaniu matematyki.

Punktem wyjścia dla Sierpińskiego było pojęcie funkcji, czyli takiego odwzorowania, które każdemu elementowi pewnego zbioru X przyporządkowuje dokładnie jeden element drugiego zbioru Y. Innymi słowy, ustalając funkcję między dwoma zbiorami ustalamy według Sierpińskiego pewną odpowiedniość między elementami tych zbiorów.

Drugi krok przeprowadzony przez polskiego uczonego to zawężenie zbioru wszystkich funkcji do takich, które każdemu elementowi ze zbioru X przypisują za każdym razem inny element zbioru Y i każdy element zbioru Y odpowiada pewnemu elementowi ze zbioru X. Tego rodzaju odpowiedniość Sierpiński określił jako odpowiedniość doskonałą. Używając współczesnej terminologii, bijekcje to te odwzorowania, które według Sierpińskiego są utożsamiane z odpowiedniością doskonałą i mają one szczególnie istotne znaczenie dla całej matematyki (zob. Sierpiński, 1909, s. 9).

Po wprowadzeniu podstawowego pojęcia odpowiedniości doskonałej, Sierpiński pokazał, jak pracuje ono w poszczególnych gałęziach matematyki. Swój przegląd rozpoczął on od teorii mnogości, kierując uwagę w stronę liczb kardynalnych. Przypomniał, że u podstaw definicji liczby kardynalnej leży pojęcie równoliczności dwóch zbiorów, czyli – w jego „filozofującej" terminologii – pojęcie doskonałej odpowiedniości pomiędzy zbiorami (zob. Sierpiński, 1909, s. 9).

W klasie wszystkich liczb kardynalnych można wprowadzać działania i budować dalej bardzo bogatą arytmetykę liczb kardynalnych. Jest to możliwe dzięki takiemu narzędziu, jak odpowiedniość doskonała, która pozwoliła matematykom skupić się wyłącznie na zależności między mocami zbiorów i abstrahowaniu od poszczególnych elementów zbiorów. Ma to również szczególne znaczenie w kontekście powszechnie znanych paradoksów związanych z nieskończonością[7].

Rozważając powyższy problem, Sierpiński przypomniał, że potocznie najczęściej przyjmuje się, że pojęcie równej mocy jest identyczne z pojęciem tej samej liczności. Jeżeli zawęzimy się do zbiorów skończonych, podkreślał polski uczony, to takie utożsamienie jest jak najbardziej uzasadnione i poprawne. Jednakże patrząc w tych kategoriach na zbiory nieskończone, dochodzimy według Sierpińskiego do pewnych na pozór niezgodnych z intuicją wniosków:

- zbiór wszystkich liczb naturalnych parzystych jest tej samej mocy, co zbiór liczb naturalnych;
- zbiór liczb wymiernych (gęsty w $\mathbb{R}$) jest tej samej mocy, co zbiór liczb naturalnych;

[7] Sierpiński mówił w tym miejscu nie tyle o paradoksach, ile o *rażących przykładach* pokazujących pewne rozbieżności między własnościami zbiorów skończonych a zbiorów nieskończonych. (zob. Sierpiński, 1909, s. 11).

- zbiór punktów całej płaszczyzny jest równej mocy ze zbiorem punktów skończonego odcinka prostej (zob, Sierpiński, 1909, s. 10–12).

Powyższe paradoksy, znane już znacznie wcześniej, nie dają się przezwyciężyć, jeśli matematyka zatrzymałaby się tylko na leksykalnym porównywaniu liczności. Wydaje się, że tylko dzięki takiej, a nie innej definicji zbiorów równej mocy, opierającej się na istnieniu bijekcji między zbiorami, można było zrobić krok naprzód w rozważaniu nieskończoności.

Drugą gałęzią matematyki, w której odpowiedniość doskonała odgrywa kluczową rolę, była zdaniem polskiego uczonego arytmetyka. By zobrazować, jakie znaczenie dla arytmetyki ma omawiane pojęcie, Sierpiński (1909) przeprowadził następujące analizy.

Dane niech będą dwa zbiory X, Y, które są tej samej mocy, czyli wiemy, że istnieje bijekcja f: X → Y między tymi zbiorami. Załóżmy dalej, że w każdym ze zbiorów mamy określone pewne działanie $(\cdot,\cdot)_X$ oraz odpowiednio $(\cdot,\cdot)_Y$, które spełnia dodatkowo warunek:

Dla dowolnych $a, b \in X\ (a, b)_X = (f(a), f(b))_Y$

Według Sierpińskiego, otrzymujemy w ten sposób odwzorowanie nie tylko samego zbioru na drugi zbiór, ale i transport działania określonego na elementach zbioru X na odpowiednie działanie na elementach zbioru Y. Dzięki takiemu zabiegowi można w zbiorze, w którym nie mamy działań, zdefiniować działanie, odwołując się do innego zbioru, w którym już wcześniej mamy dobrze określone działanie (zob. Sierpiński, 1909, s. 12).

Zdaniem polskiego uczonego, innym bardzo ważnym dla rozwoju matematyki zastosowaniem odpowiedniości była swoista odpowiedniość między arytmetyką i geometrią. W tym aspekcie najlepszym i najbardziej charakterystycznym przykładem odpowiedniości była dla Sierpińskiego geometria analityczna, której podwaliny stworzył Kartezjusz. W swoim wykładzie polski matematyk podkreślił, iż główna idea geometrii analitycznej zasadza się na przyjętej przez francuskiego uczonego bijekcji (u Sierpińskiego – odpowiedniości doskonałej) między parami liczb rzeczywistych a punktami płaszczyzny:

> Ustalmy odpowiedniość doskonałą między punktem M, a parą dwóch liczb, x oraz y. Wprowadzamy w tym celu dwie proste prostopadłe OX i OY. Rozważmy ćwiartkę XOY. Każdemu punktowi M tej ćwiartki możemy przypisać w sposób jednoznaczny dwie liczby: pierwszą – x – odległość od osi OY, drugą – y – odległość od osi OX oraz odwrotnie – dwie liczby x, y wyznaczają przy przyjętej interpretacji dokładnie jeden punkt ćwiartki XOY[8].

[8] Można także punkt M przedstawiony za pomocą pary (x, y), utożsamić z liczbą zespoloną x + iy i budować arytmetykę liczb zespolonych (zob. Sierpiński, 1909, s. 13).

W ten oto sposób stało się według Sierpińskiego jasnym, iż każda figura geometryczna może być utożsamiona ze zbiorem punktów (x, y), dla których liczby x i y spełniają określone warunki wyrażone w postaci odpowiednich równań i nierówności. Obiekty geometrii stały się tym samym pewnymi obiektami algebraicznymi.

Nie podlega wątpliwości fakt, iż zaaplikowanie języka algebry do geometrii uczyniło tę drugą łatwiejszą do uprawiania i pozwoliło sformalizować naturalne, intuicyjne operacje na obiektach geometrycznych. Samo zaś wyrażenie takich operacji w języku geometrii jest zdecydowanie mniej przejrzyste[9].

Rozwój matematyki pokazał, iż połączenie geometrii z algebrą ma jeszcze jeden bardzo ważny wydźwięk w kontekście kształtowania się matematyki. Na obiektach algebraicznych, które zostały przypisane różnym figurom geometrycznym, można przecież wykonywać pewne operacje czysto algebraiczne. Zauważmy, że w tym miejscu nasuwa się automatycznie naturalne pytanie o interpretację geometryczną przeprowadzonej operacji. Znalezienie jej – jak zauważył Sierpiński – przyczynia się do lepszego rozumienia algebry i umożliwia dalsze, ciekawe analizy. Widzimy zatem, że ustalenie odpowiedniości

[9] Można podać wiele podobnych odpowiedniości. Dowolnemu punktowi M(x, y) odpowiada wektor skierowany o początku w punkcie O(0, 0) oraz o końcu w punkcie M($\overrightarrow{OM}$). W ten sposób określa się odpowiedniość doskonałą między liczbami zespolonymi a wektorami. Dzięki temu wszystkie geometryczne działania na wektorach i inne operacje możemy zapisać algebraicznie za pomocą liczb zespolonych (zob. Sierpiński, 1909, s. 13–15).

między dwoma pozornie odległymi dziedzinami wpływa na rozwój, atrakcyjność i przystępność obydwóch dyscyplin.

Równie ciekawe zastosowania odpowiedniości można znaleźć według Sierpińskiego w samej geometrii. Polski matematyk podał szereg przykładów obrazujących znaczenie odpowiedniości w poszczególnych działach geometrii. Pierwszą gałęzią geometrii, na którą Sierpiński zwrócił uwagę, była kartografia. Nauka ta, zajmując się odwzorowaniem kuli (sfery) na płaszczyźnie bada tym samym, jaka figura geometryczna na płaszczyźnie odpowiada dowolnej figurze geometrycznej na sferze (zob. Sierpisńki, 1909, s. 16).

Inną gałęzią geometrii badaną przez Sierpińskiego (1909), w której pojęcie odpowiedniości doskonałej ma bardzo szerokie zastosowanie, jest według polskiego uczonego geometria rzutowa. Istota odpowiedniości zasadza się w tym przypadku na możliwości zamiany pojęć: punkt i prosta. W geometrii rzutowej są to tak zwane pojęcia dualne. Sama zaś odpowiedniość punktów i prostych znajduje według Sierpińskiego wspaniały wyraz w tak zwanej zasadzie dwoistości, która umożliwia wypowiedzenie każdego aksjomatu i twierdzenia geometrii w dwóch dualnych postaciach (zob. Sierpiński 1909, s. 16–17):

V aksjomat Euklidesa

– *przez dwa różne punkty można poprowadzić dokładnie jedną prostą*

oraz

– *każde dwie różne proste przecinają się w dokładnie jednym punkcie.*

Twierdzenie Desarguesa:

– *dwa dowolne trójkąty na płaszczyźnie mają oś perspektywy*[10] *wtedy i tylko wtedy, gdy mają środek perspektywy*[11].

Ostatnią dziedziną, w której Sierpiński badał zastosowania odpowiedniości jest analiza matematyczna. Polski matematyk zwrócił uwagę zwłaszcza na zagadnienie ciągów liczbowych. Przytoczymy najpierw za Sierpińskim podstawowe definicje:

Rozważmy dowolny ciąg nieskończony

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

możemy konstruować dla niego następujące ciągi:

ciąg n-*tych sum częściowych szeregu nieskończonego*

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \, ;$$

---

[10] *Mówimy, że dwa trójkąty mają oś perspektywy wtedy i tylko wtedy, gdy punkty przecięcia prostych zawierających odpowiednie boki trójkątów są współliniowe i prostą wyznaczoną przez te punkty nazywamy osią perspektywy.*

[11] *Mówimy, że dwa trójkąty mają środek perspektywy wtedy i tylko wtedy, gdy proste wyznaczone przez odpowiednie pary ich wierzchołków przecinają się w jednym punkcie, który nazywamy środkiem perspektywy.*

ciąg n-*tych iloczynów częściowych nieskończonego iloczynu*

$$p_n = \prod_{i=1}^{n} a_i\,;$$

ciąg kolejnych reduktów nieskończonego ułamka łańcuchowego:

$$u_1 = \frac{1}{a_1}, u_2 = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}},$$

$$u_3 = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}}}, u_4 = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4}}}}, \ldots$$

Polski uczony, nie wchodząc w szczegóły teorii ciągów i szeregów, podał[12], iż w rzeczywistości, badając nieskończony szereg, iloczyn czy też ułamek łańcuchowy, badamy, dzięki pojęciu odpowiedniości, odpowiadający mu nieskończony ciąg częściowych sum, iloczynów, kolejnych reduktów. Ponadto, według Sierpińskiego, należy pamiętać, iż analizując dowolny ciąg nieskończony, można go przekształcić w odpowiadający mu szereg, iloczyn i ułamek łańcuchowy, wyznaczając kolejne jego czynniki. Polski uczony podkreślał, iż w wielu przypadkach nieskończone ciągi, szeregi, iloczyny i ułamki łańcuchowe to obiekty istotnie ze

[12] Sierpiński w swojej pracy odsyłał do porównania z wykładami uniwersyteckimi Stanisława Zaremby: *Teoria ciągów i szeregów nieskończonych* (Zaremba, 1906).

sobą powiązane, w taki sposób, iż twierdzenie dotyczące jednego z tych obiektów wpływa na twierdzenie dotyczące innego. Samo zaś badanie tych obiektów „analitycznie równoważnych" jest według Sierpińskiego w pełni uzasadnione, gdyż pewne twierdzenia łatwiej dają się wyrazić i udowodnić dla ciągów, inne dla szeregów, iloczynów, czy ułamków łańcuchowych (zob. Sierpiński, 1909, s. 18).

Przedstawiliśmy tylko pobieżnie zastosowania odpowiedniości zawarte w wykładzie habilitacyjnym Sierpińskiego. Wydaje się, iż w pełni potwierdzają one postawioną na początku wykładu habilitacyjnego metodologiczną tezę opisującą fundamentalne znaczenie odpowiedniości dla całej matematyki.

Tym sposobem odpowiedniość, zdaniem Sierpińskiego, okazała się być kluczowym narzędziem w rękach matematyka. Pojęcie to pozwala na abstrakcję od konkretnych, jednostkowych przedmiotów matematyki i pójście o krok dalej, prowadząc do coraz szerszych uogólnień. Daje szansę na skupienie się i dokładne badanie zależności między różnymi obiektami. Dzięki odpowiedniości można konstruować nowe pojęcia, badać ich własności, a co za tym idzie, twórczo rozwijać poszczególne dziedziny matematyki.

Szczególną zaś rolę odegrała odpowiedniość w arytmetyce liczb kardynalnych, gwarantując już samą właściwą definicję liczby kardynalnej. Zastosowanie w tym miejscu odpowiedniości doskonałej pozwoliło pozbyć się tego, co uchodziło wcześniej za paradoksalne i ostatecznie umożliwiło bezpieczne badanie matematycznej nieskończoności.

Ponadto, odpowiedniość jest także źródłem ciekawych inspiracji wiązania pewnymi zależnościami różnych teorii matematycznych. Ma zatem istotne znaczenie dla unifikacji matematyki. Ukazany przez Sierpińskiego pierwotny związek algebry z geometrią oparty na istnieniu pewnej odpowiedniości jest *de facto* spojrzeniem na matematykę niejako z zewnątrz i pokazaniem związków między różnymi teoriami matematycznymi.

Zauważmy, iż zastosowanie odpowiedniości w matematyce ma u Sierpińskiego również pewien walor heurystyczny. Ustalenie odpowiedniości między dwoma zbiorami obiektów pozwala przenosić pewne działania, relacje na zbiory ubogie w takie struktury. Wzbogacanie teorii matematycznych, które byłoby nie do pomyślenia bez odpowiedniości, odzwierciedla głębię matematycznego myślenia:

> Dobrzy matematycy widzą analogie między twierdzeniami, lepsi między teoriami, ale najlepsi widzą analogie między analogiami[13].

[13] Powyższy cytat pochodzi od innego wybitnego polskiego matematyka Stefana Banacha (zob. Nikonowicz, 1992).

2. Stosunek Sierpińskiego do pewnika wyboru

Wacława Sierpińskiego uznaje się za pierwszego (historycznie) obrońcę aksjomatu wyboru (zob. Moore, 1982, s. 195) choć winniśmy tu wyraźnie podkreślić, że Sierpiński nie postrzegał postulatu wyboru tak jak jego autor – Zermelo. Podchodził do niego jak do każdego innego aksjomatu:

> Wolno nam zawsze przyjąć lub odrzucić dany pewnik, jeżeli, naturalnie, nie przeczy on intuicji albo innym już przyjętym pewnikom. (Sierpiński, 1928, s. 101).

Według Sierpińskiego, żaden postulat matematyki, w szczególności również aksjomat wyboru, nie jest w jakikolwiek sposób uprzywilejowany. Podejmując decyzję o jego ewentualnej akceptacji, nie należy się kierować przyjętymi wcześniej założeniami, przekonaniami czy uprzedzeniami. Winno się raczej skupić na dokładnych filozoficznych i nade wszystko matematycznych analizach danego aksjomatu, jego konsekwencjach i zastosowaniach. Postawę Sierpińskiego wobec AC można zatem nazwać postawą obiektywnego badacza. Takie podejście wydaje się być jedynym właściwym, w szczególności zaś w sytuacjach, w których wymagane jest podjęcie decyzji mającej istotny i faktyczny wpływ na kształt całej matematyki.

Zermelo, wprowadzając w 1904 roku aksjomat wyboru, zwracał uwagę na jego oczywistość, prostotę i szerokie zastosowania. Należy podkreślić, że Sierpiński jako kluczową traktował jedynie rolę postulatu Zermela w matematyce. Nie postrzegał go ani w kategoriach prawdy czy fałszu, ani w kategoriach oczywistości bądź jej braku. Nigdy nie był też skłonny przypisać, podążając za stanowiskiem Zermela, zasadzie wyboru statusu prawa logicznego – założenia prostego, koniecznego i oczywistego, przyjmowanego w matematyce na samym „wejściu". Zwłaszcza, iż polski matematyk był świadomy nieporozumień, jakie spowodowały dotychczas sama formuła aksjomatu wyboru, jak i jego istota.

Można ponadto powiedzieć, że jego działania nigdy nie miały na celu przekonania matematyków czy filozofów do akceptacji pewnika Zermela. Dlatego w pewnym sensie aksjomat wyboru był dla niego obojętny. Decyzję o jego odrzuceniu lub przyjęciu pozostawiał do świadomego rozstrzygnięcia każdemu matematykowi. Podkreślał przy tym, czym powinna być poparta ta decyzja – pełną odpowiedzialnością za matematykę, jaką wybieramy akceptując AC, bądź z niego rezygnując.

Wydaje się, że na taką postawę Sierpińskiego miała istotny wpływ świadomość kontrowersji, jakie wprowadzał aksjomat wyboru wśród matematyków i filozofów. Polski matematyk był bardzo dobrze zaznajomiony z różnymi aspektami dyskusji wokół AC i mógł odnieść się do nich z dystansem. Warto tu podkreślić, że Zermelo, autor pewnika wyboru, mimo iż wiedział, że jego określenie tego aksjomatu jako oczywistego pociąga za sobą zarzut subiektywności, nie zrezygnował z niego i wierzył, że opory w stosunku do jego postulatu zostaną w końcu przezwyciężone. Sierpiński w swoich badaniach i sądach dotyczących pewnika wyboru pozostawał od samego początku w pełni obiektywny, bez żadnego zaangażowania ideologicznego.

Właśnie w duchu zdystansowanej obiektywności Sierpiński prowadził badania nad aksjomatem wyboru przez około 30 lat. Charakter i kolejność jego analiz są w pełni kompatybilne z deklarowaną postawą.

Początkowym etapem badań było poznanie prawdziwej istoty aksjomatu wyboru. Dostrzeżenie sensu i statusu zasady wyboru i zwrócenie uwagi na mylącą nazwę postulatu wyboru pozwoliło na pewne rozstrzygnięcia odnoszące się do filozofii matematyki. Jego prace dały systematyzację i swego rodzaju podsumowanie filozoficznych aspektów debaty wokół pewnika wyboru. Postulat Zermela okazał się być założeniem o charakterze czysto egzystencjalnym[14] i w związku z tym filozoficzne aspekty debaty wokół AC winny zostać przeniesione na grunt sporu o istnienie w matematyce.

Dopiero po uczynieniu przez Sierpińskiego powyższych rozstrzygnięć, stało się możliwym przejście do następnego, zasadniczego punktu badań. Ów drugi etap rozważań polskiego matematyka to czysto matematyczna analiza zależności między różnymi twierdzeniami a poszczególnymi wersjami aksjomatu wyboru, której wynik ma być kluczowy w decyzji o przyjęciu bądź odrzuceniu aksjomatu Zermela. Sierpiński przyjmował zatem postawę czysto pragmatyczną – nic innego, jak tylko prak-

[14] *Gdy natomiast pewnik [pewnik wyboru], ... należy uważać, jako czysty pewnik istnienia (Existenzaxiom)* (Sierpiński, 1928, s. 108).

tyczne zastosowania pewnika wyboru w pracy matematyka, mają dominującą wagę w rozstrzygnięciu problemu akceptacji AC:

> W każdym razie, jak to zaznaczyliśmy już wyżej, jest rzeczą wielce pożądaną rozróżnianie twierdzeń, które mogą być dowiedzione bez pewnika Zermelo, od twierdzeń których nie potrafimy dowieść bez pomocy tego pewnika. (Sierpiński, 1928, s. 113).

Powyższe podejście Sierpińskiego kontrastuje ze stanowiskiem wielu czołowych matematyków początku dwudziestego wieku zajmujących się teorią mnogości: Rene Baire'a, Emila Borela, Henriego Lebesgue'a, Felixa Bernsteina oraz Bertranda Russella (zob. Moore, 1982, s. 93–100, 110–111, 123–126). W latach 1904–1916 polemika prowadzona wokół AC wiązała się przede wszystkim z filozoficznymi kontrowersjami generowanymi przez pewnik wyboru. Mimo że w latach 1908–1916 rzadko były podejmowane nowe zagadnienia z filozofii matematyki związane z zasadą wyboru, echa krytyk z pierwszych lat debaty (1904–1908) nadal pozostawały ważne. Nic nie utracił na mocy zarzut braku konkretnej definicji, konstrukcji postulowanej w aksjomacie Zermela funkcji wyboru oraz problem wprowadzonej do matematyki przez Cantora nieskończoności aktualnej. Ponadto, nie została rozstrzygnięta kwestia statusu pewnika wyboru – czy może być traktowany jako zasada logiczna, czy należy szukać jego dowodu, czy nie prowadzi do sprzeczności i czym winno być uzasadnione jego ewentualne przyjęcie. Aksjomat wyboru tylko wznowił nierozwiązywalny spór o istnienie w matematyce.

Opisaną wyżej postawę możemy określić jako dogmatyczną. Charakteryzowała się ona istnieniem widocznego ścisłego sprzężenia między przyjmowaną filozofią matematyki a decyzją o akceptacji bądź odrzuceniu pewnika wyboru. Praktyka matematyczna, tak silnie akcentowana przez Wacława Sierpińskiego, zajmowała w takim podejściu drugorzędną rolę.

Prowadząc przez wiele lat badania nad zastosowaniami postulatu Zermela w czysto pragmatycznym duchu, Sierpiński niejednokrotnie podkreślał, jak bardzo aksjomat wyboru wpisany jest nie tylko w teorię mnogości, lecz także w analizę:

> Co się tyczy, w szczególności pewnika Zermelo, to należy w każdym razie mieć na względzie, że [...] pewnik Zermelo upraszcza znacznie wiele działów teorii mnogości i analizy oraz jest nieodzownym dla dowodu wielu ważnych twierdzeń tych nauk (Sierpiński, 1928, s. 101).

Polski matematyk zwracał zatem szczególną uwagę na fakt, iż w przypadku wielu twierdzeń pewnik wyboru jest po prostu nieodzowny. Nieusuwalność zasady wyboru z analizy czy teorii mnogości uzasadniał Sierpiński poprzez dowiedzenie, że pewne twierdzenia nie tylko są konsekwencją pewnika wyboru, lecz także same implikują AC (zob. Sierpiński, 1928, s. 113–114). Takie odkrycia dobitnie pokazują, jak ogromny wpływ na kształt matematyki ma decyzja o przyjęciu bądź odrzuceniu AC.

W związku z powyższym, według Sierpińskiego, niezależnie od faktu, czy akceptujemy pewnik wyboru czy go negujemy, niezależnie od tego, ile wątpliwości i problemów (przede wszystkim natury filozoficznej, choć nie tylko) nastręcza aksjomat wyboru, zawsze musimy liczyć się z jego rolą w teorii mnogości i analizie. Możemy zasadę wyboru odrzucić, możemy jej zaprzeczyć, ale nie wolno negować jej obecności i wagi wpisanych w matematykę klasyczną[15]:

> Niezależnie od tego, czy jesteśmy osobiście skłonni przyjąć pewnik Zermelo, czy też nie, musimy w każdym razie liczyć się z jego rolą w teorii mnogości i analizie (Sierpiński, 1928, s. 102).

Dla Sierpińskiego istotna była jeszcze jedna wartość aksjomatu wyboru. Uważał on, że można traktować postulat Zermela jako narzędzie heurystyczne, gdyż:

> pozwala wykryć twierdzenia (lub konstruować przykłady nieefektywne), których dowodów możemy szukać następnie na innej drodze (Sierpiński, 1928, s. 113).

Sierpiński twierdził, że jeżeli przeprowadzamy dowód twierdzenia za pomocą pewnika wyboru, powinniśmy mieć

[15] Nie wchodząc w precyzyjne wyznaczanie granic matematyki klasycznej, używając tego określenia mamy na myśli analizę XIX wieku oraz Cantorowską teorię mnogości.

świadomość, iż w rzeczywistości pokazujemy wynikanie pewnego wniosku z przyjętej prawdziwości zasady wyboru (pewnej szczególnej postaci zasady wyboru) (zob. Sierpiński, 1928, s. 113). Dowiedzenie tego typu faktów ma istotną wartość dla matematyki. Można później podjąć wyzwanie pominięcia aksjomatu Zermela lub udowodnić jego nieusuwalność.

Przytoczone fragmenty prac Sierpińskiego ukazują istotne cechy podejścia polskiego matematyka do aksjomatu wyboru. W jego rozważaniach na pierwszy plan wysuwa się obiektywizm. Według Sierpińskiego, podejmując zagadnienie przyjęcia bądź odrzucenia postulatu wyboru, należy zwrócić szczególną uwagę na jego zastosowania i nieodzowność w dowodzie wielu istotnych wyników matematyki. Na drugi plan winny zejść przyjęte wcześniej założenia czy upodobania. Decyzja o akceptacji lub negacji AC winna być oparta na pełnej świadomości wpływu tej decyzji na kształt uprawianej matematyki.

Podejście Sierpińskiego możemy zatem istotnie określić jako postawę obiektywnego obrońcy, badacza. Po uczynieniu filozoficznych rozstrzygnięć i podsumowań podjął on czysto matematyczne badania nad rolą pewnika wyboru. Tylko prawdziwe poznanie zastosowań zasady wyboru i jej znaczenia dla całej matematyki umożliwiało podjęcie właściwej decyzji o przyjęciu lub odrzuceniu AC.

3. Podsumowanie

Wykład habilitacyjny oraz postawa Sierpińskiego zajmowana wobec pewnika wyboru wskazują na nakierowanie w jego filozofii w stronę analizy praktyki matematycznej. Filozof, zdaniem Sierpińskiego, badając tak specyficzną dziedzinę, jaką jest matematyka, winien skupić się przede wszystkim na poznaniu, jak powstają poszczególne teorie matematyczne. Kluczowym było dokonanie analizy, jak prowadzone są poszczególne rozumowania matematyczne i jakie narzędzia się w nich wykorzystuje. W ten sposób Sierpiński wyznaczył pewnego rodzaju metodologię filozofii matematyki, w której głównym składnikiem jest pragmatyzm.

W wyniku analizy postawy polskiego matematyka wobec aksjomatu wyboru możemy stwierdzić, iż według Sierpińskiego, ilekroć filozof lub matematyk napotka na pewne sporne kwestie w podstawach matematyki, na przykład na problem przyjęcia bądź odrzucenia pewnych założeń, winien przyjąć w pierwszej kolejności postawę pragmatyczną. Główną zasadą, jaką powinien się kierować przy podjęciu ostatecznej decyzji o akceptacji bądź odrzuceniu danego aksjomatu, jest zasada owocności.

Aby uczynić zadość zasadzie owocności w przypadku decyzji o odrzuceniu bądź akceptacji zasady wyboru, należy w określony sposób zanalizować rolę aksjomatu Zermela w całej matematyce. Dopiero w dalszej kolejności, mając świadomość, w jaki sposób możemy w istocie zubożyć matematykę odrzucając ten aksjomat, możemy podjąć właściwą decyzję.

Przy rozstrzyganiu tego typu kwestii należy, zdaniem Sierpińskiego, przyjąć postawę w pewnym sensie neutralną i oprzeć się na obiektywnym badaniu wpływu danego aksjomatu na samą tylko matematykę.

Podkreślmy raz jeszcze, iż Sierpiński nigdy nie negował wagi filozoficznych zagadnień generowanych na łonie czystej matematyki. Istotne kwestie filozoficzne, dotyczące między innymi ontologii matematyki, pojawiają się u polskiego uczonego przynajmniej w dwóch miejscach. Po pierwsze, twórca polskiej szkoły matematycznej uważał, iż aksjomat Zermela jest w rzeczywistości postulatem o charakterze egzystencjalnym, pewnikiem istnienia[16]. Według niego, w aksjomacie wyboru nie postuluje się nic więcej jak tylko istnienie pewnego obiektu. W ten sposób filozoficzna analiza istoty stosowania zasady wyboru w matematyce doprowadziła Sierpińskiego do konieczności rozważenia sensu aksjomatu wyboru na tle sporu o istnienie w matematyce.

Drugie miejsce w rozważaniach Sierpińskiego, w którym zauważamy jego czysto filozoficzne deklaracje, to postawiona w wykładzie habilitacyjnym teza dotycząca istnienia odpowiedniości doskonałej między światem fizycznym (dziedziną realnej rzeczywistości) a matematyką (dziedziną abstrakcji) (zob. Sierpiński, 1909, s. 19). W tym bowiem stanowisku kryje się przede wszystkim przyjęcie

[16] *Lecz co to znaczy „istnieć”? To właśnie wielkie i dawne zagadnienie istnienia leży u podłoża całego sporu o pewnik Zermelo* (Sierpiński, 1928, s. 103).

założenia przypisującego światu fizycznemu, w jego najgłębszej strukturze, matematyczny charakter. Ponadto, wydaje się, iż ze słów Sierpińskiego możemy wyczytać ontologiczne założenia dotyczące istnienia pewnych obiektów należących do dziedziny matematyki. Odpowiedniość między światem fizycznym istniejącym rzeczywiście a światem matematyki domaga się bowiem założenia jakiegoś rodzaju istnienia przedmiotów badanych przez matematykę.

Prowadzone przez Sierpińskiego dogłębne badania AC pokazują, iż polski uczony przypisywał teorii mnogości kluczowe miejsce pośród wszystkich gałęzi matematyki. Wszak właśnie na gruncie teorii zbiorów został sformułowany aksjomat wyboru, który, zdaniem Sierpińskiego, istotnie wpisany jest w inne dyscypliny matematyczne. Po raz kolejny praktyka matematyka – badacza teorii zbiorów, doprowadziła twórcę polskiej szkoły matematycznej do czysto filozoficznej konkluzji. W tym bowiem kontekście, teoria mnogości stała się dla Sierpińskiego podstawową (w sensie metodologicznym) i fundamentalną dziedziną matematyki.

Bibliografia

Herrlich, H., 2006. *Axiom of choice*. Berlin, Heidelberg: Springer Verlag.

Moore, G.-H., 1982. *Zermelo's axiom of choice. Its origins, development and influence*. Berlin: Springer-Verlag.

Nikonowicz, D., 1992. *Stefan Banach (1892–1945)*, [online] Wortal Stefana Banacha, dostępny na: http://kielich.amu.edu.pl/Stefan_Banach/ nikonowicz.html [9 lutego 2016].

Poincaré, H., 1902. *La science et l'hypothèse.* Paris: Flamarion.

Sierpiński, W., 1909. Pojęcie odpowiedniości w matematyce. *Przegląd Filozoficzny*, *12*, s. 8–19.

Sierpiński, W., 1916. Sur le rôle de l'axiome de M. Zermelo dans l'analyse moderne. *Comptes Rendus des Séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, Classe III*, *163*, s. 688–691.

Sierpiński, W., 1918. L'axiome de M Zermelo et son rôle dans la théorie des ensembles et l'analyse. *Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie, Classe des Sciences Math. Série A,* s. 97–152.

Sierpiński, W., 1921. Les exemples effectifs et l'axiome du choix. *Fundamenta Mathematicae*, *2*, s. 112–118.

Sierpiński, W., 1928. *Zarys teorii mnogości*, 3. Warszawa: Skład Główny w Księgarni E. Wendego i S-ki.

Zaremba, S., 1906. *Teoria ciągów i szeregów nieskończonych.* Kraków: Wykłady Uniwersyteckie.

O platońskich ideach

Bogdan Dembiński
Uniwersytet Śląski

On Plato's doctrine of ideas

Abstract

This paper is an attempt to clarify the ontological status of Platonic ideas. My considerations are based on the example of mathematical ideas and their relation to the subjects of mathematics and phenomena, since such modes of existence are distinguished in the philosophy of Plato.

Keywords

philosophy of mathematics, mathematical platonism, history of philosophy, Plato, platonism, Platonic idealism

Próbę wyjaśnienia statusu ontycznego idei platońskich proponuję przedstawić na przykładzie rozważań o ideach matematycznych i ich stosunku do przedmiotów matematyki oraz zjawisk. Takie bowiem sposoby istnienia wyróżnia w swojej filozofii Platon. W późnym, ostatnim okresie swojej twórczości (nauka niepisana – *agrapha dogmata*) dodaje jeszcze zasady bytowe: Jedno i Nieokreśloną Dyadę.[1] Widoczna staje się w ten sposób wielowarstwowa struktura rzeczywistości, która obejmuje sobą wiele sposobów możliwego istnienia. Mamy zatem do czynienia z poziomem istnienia rzeczy zmiennych, uwarunkowanych czasoprzestrzennie, z poziomem istnienia abstrakcyjnych przedmiotów matematyki, z poziomem istnienia bytów-idei, a w końcu z poziomem istnienia bytowych zasad: Jedna i Nieokreślonej Dyady. Już z tej klasyfikacji wynika, że przyjmowane potocznie, w uproszczonej interpretacji podręcznikowej, przekonanie o istnieniu „dwu światów" nie odpowiada intencji Platona. Nie o „światy" zresztą tutaj chodzi, lecz o sposoby, na jakie może on istnieć. Platon w *Timajosie* jednoznacznie opowiedział się za istnieniem wyłącznie jednego świata[2], posiadającego jedynie różne sposoby istnienia. Dlatego nie może być mowy o wielu światach, lecz wyłącznie o wielu sposobach istnienia w świecie. Początkowo Platon rozważał jedynie sposoby istnienia wiecznego i zmiennego, później jednak rozszerzył je o przedmioty abstrakcyjne (przedmioty matematyki) oraz zasady bytowe (Jedno i Nieokreśloną Dydę). Dlatego mówić należy o czterech sposobach istnienia obecnych w platońskiej ontologii, a nie o dwóch. Tym

[1] Najważniejsze komentarze związane z próbą odczytania treści nauk niepisanych: (Gaiser, 1963; Kramer, 1990; Gadamer, Schadewaldt, 1968; Findlay, 1974; Sayre, 1983; zob. Kijewska, Zieliński, 1993; Blandzi, 2002; Dembiński, 1999; Dembiński, 2003).

[2] *Więc, żeby ten jeden świat był podobny do najdoskonalszej istoty żywej, dlatego twórca światów nie zrobił światów dwóch, ani ich nieskończonej ilości, tylko powstał ten jeden świat, jednorodzony i taki zostanie dalej* (Platon, *Timajos*, 31b).

bardziej nie wolno nam mówić o jakiś oddzielnych „światach". Jest to nieprawdziwe i mylące. Koncepcja „światów", szczególnie koncepcja „dwu światów" pojawiła się u komentatorów neokantowskich. Szczególną rolę odegrał w tej interpretacji Emil Lask (1923). Uznał, że w przypadku Platona, Arystotelesa czy Kanta należy przyjąć istnienie dwu światów: świata tego, co zmysłowe i świata nadzmysłowego. N. Hartmann (1958), komentując interpretację E. Laska, stwierdził, że błąd Laska polega na tym, że przyjął on istnienie dwu odrębnych światów, nie zauważając, że nie o światy chodzi, a sposoby istnienia.

Za istotne natomiast, należy uznać przekonanie Platona, (zgodne w pełni z intuicjami Parmenidesa z Elei), że podstawowym sposobem bycia jest to, co niezmienne i wieczne. To zaś, co zmienne i czasowe stanowi wyłącznie postać tego ostatniego. W ten sposób bycie wieczne i niezmienne zostaje wyróżnione, zaś hierarchia sposobów bycia układa się w zależności od stopnia, w jakim określony sposób bycia bliski jest temu, co wieczne i niezmienne.

Wydaje się, że przekonanie o prymacie stałości i niezmienności jest bezpośrednim skutkiem pitagorejskiego sposobu pojmowania świata, w którym założono prymat matematyki nad fizyczną strukturą zjawisk. Matematyka, tak jak rozumieli ją Pitagorejczycy, stanowiła podstawę i istotę struktur zjawiskowych, zaś jej sposób istnienia wskazywał na niezmienność i wieczność. Daje to podstawę do twierdzenia, że to matematyka i myślenie matematyczne (wywiedzione z kręgu pitagorejskiego) przyczyniło się w sposób znaczący do przedstawienia przez Platona koncepcji idei. Studia u matematyka Teodora i liczne kontakty z wybitnymi matematykami pitagorejskimi, precyzja sokratejskiej metody indukcyjnej i metody definiowania, kontakty w Akademii z najwybitniejszymi matematykami: Eudoksosem, Menaichmosem, Taudiosem, Teajtetem czy Leonem; wszystko to sprawiło, że matematyka stała się dla Platona wzorcem precyzyjnego i skutecznego opisu świata. Kiedy więc próbował on budować ontologię świata, zdecydował, że to matematyka stanowić może najdoskonalszą egzemplifikację ontologii[3] (oczywiście są jeszcze studia nad koncepcją sokratejską i kwestią istoty pojęć ogólnych w definicjach).

Koncentrując się na matematycznym kontekście myślenia platońskiego, proponuję zasadnicze zręby teorii idei przedstawić na przykładzie prezentowanej w *Państwie* metafory odcinka (Platon, *Państwo*, 509d-511a), w której odwołując się do przykładu matematyki, Platon wyjaśnia swoje stanowisko ontologiczne. Twierdzi tam, że najniższy poziom rzeczywistości przedstawia się poznającemu zawsze, jako zmienny i w najwyższym stopniu dynamiczny. Odpowiada mu rodzaj zmysłowego poznania, które realizuje się w postaci zmysłowych (równie zmiennych) obrazów świata, będących wyobrażeniami (*eikasia*). Są to odbicia i odwzorowania rzeczywistości, rodzące przypuszczenia i mniemania. Jako takie, domagają się one uwiarygodnienia

[3] Platon czerpie z dokonań Sokratesa, który zaproponował przyjęcie metody indukcyjnej i metody definiowania. W tej ostatniej Sokrates próbuje dojść za pomocą definicji do uchwycenia istoty pojęcia ogólnego, pewnego uniwersale, w którym wyrażać się ma istota rzeczy. Sokrates nie podejmuje już jednak rozważań nad sposobem istnienia tak ujętej istoty. Uczyni to dopiero Platon w swojej koncepcji idei.

(*pistis*). Umożliwia to podmiotowi poznającemu bezpośredni kontakt z rzeczami, ich ogląd i opis. Następuje wtedy weryfikacja wyobrażeń. Nadal jest to jednak poznanie niedokładne i nieprecyzyjne. Na szczycie poznania zmysłowego usytuował Platon specyficzną władzę poznawczą, którą określił mianem „prawdziwego mniemania" (*alethes doksa*) (Platon, *Menon*, 85c, 97c, 98a). Jest to rodzaj poznawczej intuicji, budowanej w oparciu o dane zmysłowości, pozwalający na „podejrzenie", czym w istocie jest przedmiot zmysłowego poznania. Jest to rodzaj „przeczucia prawdy", który staje się źródłem i przyczyną zdolności formułowania hipotez, punktem wyjścia w tworzeniu każdej nauki. Hipotezy uzyskują swoje rozwinięcie na obszarze kolejnej władzy poznawczej, którą Platon określi mianem rozsądku (*dianoia*). Jej funkcją jest próba potwierdzenia hipotez oraz zbudowanie na ich podstawie inteligibilnych modeli rzeczy i stanów rzeczy. Istotną rolę odgrywa przy tym rozumowanie przyczynowe i logika. Wykorzystana zostaje również specyficzna władza intelektu, którą jest zdolność do abstrahowania (*afairesis*)[4]. Tworzenie inteligibilnych modeli opiera się

[4] *W tradycji Akademii i u Arystotelesa pojęcie aphairesis (intelektualny akt abstrakcji – B.D.) jest w najwyższym stopniu złożone, i dziś jeszcze dużo się dyskutuje na temat arystotelesowskiej abstrakcji. W każdym razie jednak* νοησις, *zarówno w Akademii, jak u Arystotelesa, polega na intuicyjnym poznaniu formy lub istoty, a to ujęcie formy zakłada odcięcie tego, co nie jest istotne: właściwością myśli jest zdolność dokonania takiego podziału. Ta metoda odcięcia i podziału to właśnie abstrakcja, filozofowie ówcześni używają jej zwłaszcza do definiowania pojęć matematycznych* (Hadot, 1992, s. 184).

na umiejętności odczytywania przez podmiot obecnych w strukturze świata wzorców, organizujących porządek i ład kosmosu. Są nimi, przykładowo, cykle i rytmy dostrzegalne w działaniu natury: pory roku, dnie i noce, obiegi ciał niebieskich, powtarzalne wzorce ubarwienia, zachowań, czy uporządkowana struktura przedmiotów naturalnych. Wzorce te wskazują na występowanie prawidłowości i stałych związków w obrębie rzeczy i stanów rzeczy. Są one zasadniczą cechą organizacji porządku natury. Systemy wzorców tworzą struktury. Dzisiaj moglibyśmy powiedzieć, że zdolność rozpoznawania wzorców jest podstawową (ewolucyjną) cechą umożliwiającą bytom ożywionym poznawanie świata. Platon ma początkowo (inspirowany myślą Sokratesa) na myśli wzorce związane z ludzkimi zachowaniami: wzorce etyczne oraz wzorce estetyczne. Później jednak (przede wszystkim pod wpływem Pitagorejczyków) koncentruje uwagę na wzorcach wyznaczających porządek kosmosu i będących podstawą jego organizacji. Jest przekonany, że wzorce te mogą być precyzyjnie obrazowane za pomocą matematycznych modeli, którym w istocie odpowiadają przedmioty matematyczne. Platon ma tu na myśli przede wszystkim przedmioty geometrii i matematyczne liczby. Jako abstrakcyjne, przedmioty te istnieją poza czasem i poza przestrzenią, i pozostają zawsze tylko intelektualnymi formami obrazowania świata, precyzyjnie – formami obrazowania wzorców. Modele powstają na drodze czynności stwierdzających stałe występowanie pewnego zespołu cech w pewnej klasie przedmiotów. Wolno nam badać (na poziomie myślenia) ich wewnętrzną strukturę oraz ich powiązania z innymi modelami. Możemy też analizować, które z nich są możliwe, które konieczne, a które wykluczone. Modele te, jak twierdzi Platon i matematycy jego czasów, są konstruowane (cyrkiel i linijka) i poddają się różnego rodzaju matematycznym operacjom. Matematyk pracuje na takich modelach i może na nich poprzestać. Często jednak, podobnie jak filozof, poszukiwał będzie ostatecznego uzasadnienia tworzonych przez siebie modeli. Jest bowiem zobowiązany odpowiedzieć na pytanie: na czym opiera się obowiązywalność przedmiotów matematycznych i co uzasadnia ich prawdziwość?

Platon wykluczył tezę, że przedmioty matematyki czerpać mogą swoje uprawomocnienie z poziomu zmysłowości. Tam bowiem mamy do czynienia tylko z przypuszczeniami i mniemaniami. Wykluczył też twierdzenie, że przedmioty matematyki mogą być niezależne od działań matematyka. Stanowią one przecież skutek abstrahowania i są rezultatem konstrukcji, oraz podlegają różnym operacjom, jak również są utworzone w oparciu o określone założenia. Powiada Platon, że chociaż oglądamy je za pomocą rozsądku, to nie ma w nich jeszcze rozumu, mimo że i tam chodzi o przedmioty myśli (Platon, *Państwo*, 506). To bowiem, co właściwe rozumowi (najwyższej władzy poznawczej – *noesis*) dotyczy czegoś istotniejszego, co samo przekracza zarówno struktury zjawiskowe, jak i modele matematyczne. Jest tym sfera bytu, niezmiennych i wiecznych miar, idei, organizujących postać świata, która to uzasadnia dopiero samą matematykę. Platon podaje przykład geometrii, i mówi: „geometrie te tylko przez sen marzą na temat bytu i dojrzeć go nie mogą, jak długo się założeniami posługują. Dlatego stanowią jedynie rozsądne rozważanie, natomiast nie stanowią nauki pierwszej" (tamże, 533be). Są jak malowidła: „i śmiesznie byłoby patrzeć na nie poważnie, jako na prawdę" (tamże, 529de). Oznacza to, że uzasadnienia matematyki i jej przedmiotów szukać trzeba poza samą matematyką. Platon twierdzi, że muszą one mieć swoją podstawę w tym, co samo jawi się jako trwałe i niezmienne oraz niezależne od jakiegokolwiek stanowienia podmiotowego. Warunek ten spełniają tylko idee, definiowane jako byty prawdziwe (*alethes on*). Udzielają one wzorcom organizującym porządek świata nie tylko określoności, ale udzielają im również istnienia. Dotyczy to także matematycznych przedmiotów, o ile te stanowią modele wzorców. Jak idee takie rozumieć?

Postaram się przedstawić Państwu interpretację, która jest rezultatem moich studiów nad tym zagadnieniem (zob. Dembiński, 1997; 2003). Twierdzę, że Platon wyjaśnia tę kwestię dokładnie, i czyni to przede wszystkim w dialogu *Fileb*. Proponuje tam uznać idee za najwyższe miary określoności i bycia wszystkiego, co w jakikolwiek sposób istnieje, wszystko bowiem co istnieje, posiada i posiadać musi właściwą sobie miarę (granicę), która jest nie tylko źródłem określoności, ale jest również przyczyną bycia[5]. Decyduje ona o postaci rzeczy czy stanów rzeczy, wyznacza

[5] (...) *wszystkiemu, co jest (*ειναι*) jako będącemu (*οντων*) jednością i wielością, przysługuje granica (*περας*) i nieograniczone (*απειριαν*). Powinniśmy zatem, skoro jest to tak uporządkowane, zawsze jedną ideę (*μιαν ιδεαν*) pośród wszystkiego zakładać i jej szukać – znajdziemy ją, gdyż jest tam – gdy zaś ją uchwycimy, po jednej dwie, jeżeli gdzieś jest, jeśli nie to trzy bądź inną liczbę, aż do jedności początkowej. Nie będzie ona jednością i wielością tego, co*

zakres możliwego jej funkcjonowania i związków, jakie zachodzą i mogą zachodzić w obrębie każdej struktury i między jej elementami. Idea, jako miara *jest sposobem*, na jaki powiązane są ze sobą elementy w obrębie danej struktury. Jeśli uznać, że decyduje ona o związkach i relacjach między elementami w obrębie danej struktury, musi być rozumiana jako jej „istota". Jednak nie jest ona i nie może być żadnym obiektem czy przedmiotem (nawet matematycznym), gdyż wszelkie obiekty i przedmioty są i mogą być dopiero skutkiem jej działania. Ze starożytnego punktu widzenia miarę taką wyrażano zazwyczaj za pomocą pojęcia stosunku i proporcji (logos). Chodzi przy tym o najogólniejszy sposób rozumienia tych terminów, właściwy myśleniu Greków, którzy w stosunkach i proporcjach dostrzegali przyczyny działania i organizacji zjawisk. Platon czerpiąc z intuicji Pitagorejczyków przekonuje, że wszelkie struktury realne bądź matematyczne stanowią zawsze jakąś postać stosunku (logosu), są rezultatem określonego związku granicy i nieograniczenia, związku jakiejś jedności i wielości. Wtedy właściwa proporcja staje się miarą decydującą o porządku świata, jego pięknie, symetrii i harmonii. Jej poznanie jest tożsame z poznaniem prawidłowości, które wyznaczają postać świata. Wszystko, co z prawidłowości tych się wyłania jako ich realizacja, pozostaje w stałym i niezmiennym stosunku, stając się przyczyną i podstawą poznania i wiedzy. Pra-

nieograniczone, lecz pozwoli zobaczyć, ile tego jest. Tego zaś, co nazwane nieograniczonym, do wielości nie wnosić, zanim ktoś ich liczby nie dojrzy między tym, co nieograniczone, a jednością [początkową B. D.] (Platon, *Fileb*, 16cd. Tłum. własne).

widłowość oznacza zatem: działanie i układ wedle tego samego stosunku, proporcji. Jeśli mówimy o wzorcach struktur realnych, czy o matematycznych modelach, to ich zrozumienie staje się tożsame z dotarciem do tych stosunków i proporcji, dzięki którym zachowują one swoją niezmienną i ściśle określoną postać. Nie muszą one mieć wyłącznie charakteru ilościowego. W nauce greckiej mają one często wyłącznie charakter jakościowy (dotyczy to również matematyki).

Poznanie idei-miar jest również tożsame z poznaniem „istoty rzeczy". To bowiem miary decydują o postaci struktur, a więc decydują o postaci świata. Dlatego kiedy poszukujemy teoretycznego uzasadnienia „czegoś" (czy to wzorców, czy przedmiotów matematyki), odwołujemy się do pojęcia idei-miary, wyrażonej zazwyczaj poprzez określony stosunek lub proporcję, ponieważ zakładamy, że różne aspekty „rzeczy" powiązane są w naszej koncepcji tak, jak są one powiązane w rzeczy, na mocy wewnętrznych proporcji, które rzeczy te konstytuują. Zrozumieć taki stosunek czy proporcję, to zrozumieć „istotę rzeczy" (zob. Bohm, 1988, s. 31–38).

Z takiej koncepcji wynika przekonanie, że idea-miara stanowi formę wglądu w wewnętrzną naturę rzeczy, i pozwala zobaczyć (*idein*) sposób powiązania elementów w strukturach, tzn. pozwala odsłonić ich „wewnętrzny schemat". Stanowi to klucz do zrozumienia harmonii w kosmosie, harmonii w muzyce, czy harmonii w działaniu (etyka). Dlatego może powiedzieć Platon, że najpiękniejszym łącznikiem, jaki Bóg uczynił tworząc ciało świata, jest proporcja (Platon, *Timajos*, 31c), zaś „pierwsza rzecz to miara i umiarkowanie i trafienie w moment odpowiedni, i cokolwiek trzeba za coś w tym rodzaju uważać, to wszystko przybrało i ma naturę rzeczy wiecznych" (Platon, *Fileb*, 66ab). Idea-miara jawi się w ten sposób jako właściwy sposób powiązania elementów czy też organizacji działań, decydując o rodzaju porządku, który właściwy jest określonym strukturom. Pojęcie – „właściwy" (*ortos*), odpowiada platońskiemu pojęciu Dobra. Dlatego właściwe proporcje i stosunki stają się miarami określoności świata i działań człowieka, czyniąc świat i działanie to Dobrymi (*Agathon*). Przekroczenie miar (boskich bądź ludzkich) rodzi chaos i tragedię, o czym dobitnie starali się przekonać greccy filozofowie i dramatopisarze. W ten sposób pojęcie miary zaczęło współdziałać ściśle z pojęciem porządku, tak w obszarze ludzkiego działania, jak i w obszarze struktury kosmosu.

Rzecz jasna, że pojęcia idei nie mogło zabraknąć w filozoficznej refleksji nad matematyką. Również tam pojawiła się koncepcja idei-miar, określających postać przedmiotów matematycznych. Miary te, idee, nazywa Platon liczbami idealnymi i idealnymi figurami. Jeśli liczbę definiowali matematycy greccy, jako ograniczoną wielość monad[6], to kwestia, z jaką liczbą będziemy mieli do czynienia, zależy od tego, jaki stosunek monad

[6] Liczbami matematycznymi zajmuje się arytmetyka, w której obrębie definiowane są arytmetyczne pojęcia. Pełną postać prezentowanych tu intuicji Platońskich znajdujemy w *Elementach* Euklidesa, na początku księgi VII, gdzie podana jest definicja liczby. Powiada Euklides: *Liczba jest wielością utworzoną z monad* (*atithmos de, to ek monadon sygkeimenon plethos*).

jest danej liczbie właściwy. W ten sposób pojęcie liczby dedukowane jest z pojęcia stosunku. Można zasadnie domniemywać, że takie rozumienie liczby wynikało z przeobrażeń, jakie dokonały się w matematyce greckiej na skutek pojawienia się teorii proporcji Eudoksosa. Cokolwiek spełnia określony stosunek monad, musi pojawić się jako określona liczba. Ale sam stosunek nie jest liczbą. Jest miarą liczby. Platon przypisze jej miano liczby idealnej. Miara ta decyduje o pojawieniu się określonej liczby matematycznej i wyznacza jej postać (każda postać proporcji 2a:a generuje liczbę matematyczną dwa). Podobnie ma się rzecz z figurami idealnymi. Przykładowo, idea koła jest miarą wszelkiej kolistości, mogącą wyrażać się jako określony stosunek punktów na obwodzie koła do punktu środkowego. Cokolwiek spełnia taką miarę będzie kołem. Tak rozumiana idea-miara nie jest tożsama z matematycznym modelem koła, gdyż koła w naturze nie powstały dzięki modelowaniu matematycznemu, lecz istniały tam od zawsze. Modelowanie matematyczne jest jedynie sposobem zobrazowania miar. Obecność miary nie zależy też od podmiotu poznającego i jego stanowienia. Dlatego na ideach nie można prowadzić żadnych operacji. Są one, jak mówi o tym Arystoteles w *Metafizyce*, niedodawalne i stanowią swoiste całości[7]. Jako byty, idee-miary decydują rów-

[7] *Jeżeli natomiast jednostki są niedodawalne, a niedodawalne w tym sensie, że jakakolwiek jest niedodawalna do jakiejkolwiek, wobec tego liczba tego rodzaju nie może być liczbą matematyczną; bo liczba składa się z nieróżniących się jednostek* (monad – B.D.) *i dowody matematyczne zgodne są z tak utworzoną liczbą* (Arystoteles, *Metafizyka*, 1081a. Tłum. własne).

nież o istnieniu. Nie może tego uczynić żaden matematyczny przedmiot. Tak rozumiane idee: liczby idealne i figury idealne, uzasadniają istnienie, określoność, prawdziwość i niezmienność przedmiotów matematyki, nadając głęboki sens pojęciu matematycznego przyrodoznawstwa.

Należy postawić jeszcze pytanie o poznawalność idei. Matematycy czasów Platona przyjmowali określone założenia (hipotezy) w postaci układu zdań naczelnych, z których wyprowadzali kolejne zdania, które miały być na ich podstawie udowodnione. Posługiwali się zatem metodą aksjomatyczną (zob. Jordan, 1937). Platon zaś zdecydował, że w przypadku idei-miar posługujemy się metodą dialektyczną. Ma ona na celu poszukiwanie racji ostatecznych, niedowodliwych, dla wszelkich hipotez. Chodzi więc o uzasadnienie tego, co jest przedmiotem postępowania matematyka, kiedy ten posługuje się założeniami. Filozof, zobowiązany uzasadnić rację przyjęcia określonego założenia czy matematycznego modelu, odwołuje się wtedy do badania tych związków, które czynią te założenia, bądź modele, możliwymi. Bada, zatem sposób powiązania elementów w obrębie danej struktury. Dlatego metoda dialektyczna nazwana jest metodą badania i myślenia – w związkach. Wtedy, powiada Platon w Liście VII: „kiedy trzeć będziemy ze sobą pojęcia, jak krzesiwa, trysnąć może źródło prawdy, pozwalające dostrzec «istotę rzeczy»”. Platon przekonuje do istnienia intelektualnej intuicji (*noesis*), będącej intelektualnym sposobem „widzenia” prawdy, bytu, idei. Widzenie to pozwala dostrzec istotę powiązań w obrębie danej struktury, pozwala dostrzec miary jej organizacji, będące prawami porządku i ładu natury. K. Albert widzenie takie określa mianem *intuitio mistica,* twierdząc, że odpowiada mu greckie pojęcie *theoria*: oglądanie (*oran*) tego, co boskie (*theos*). Filozof „ogląda" wtedy idee bezpośrednio, mocą samego rozumu, widzi miary określoności wszelkich struktur (Albert, 1991). Widzi idee, stanowiące przyczynę istnienia i określoności w obrębie matematycznych modeli, struktur muzycznych, etycznych czy estetycznych. W dialogu *Uczta* wypowiada to przekonanie w formie poetyckiej wizji, mówiąc: „ i nagle mu się cud odsłania; widzi piękno samo w sobie, ono samo w swojej istocie [...] to, do czego szły wszystkie jego trudy poprzednie, on ogląda piękno wieczne" (Platon, *Uczta*, 210e. Tłum. W. Witwicki). Filozof „widzi" (*idein*) prawdę, widzi przede wszystkim „wieczny model", wzorzec, wedle którego Bóg utworzył i uporządkował ciało kosmosu. Zdolność takiego widzenia wynika z głębokiego związku, jaki zachodzi między strukturą intelektu a strukturą świata. Ponieważ struktura intelektu (mikrokosmos) jest częścią struktury świata (makrokosmos), mamy, twierdzi Platon, możliwość odczytywania tej struktury, gdyż jest ona utworzona wedle tych samych miar i wzorców, wedle których utworzony jest nasz intelekt. To zatem, co stanowi podstawę poznania świata, jest jedynie formą przypominania sobie (*anamnesis*) jego właściwej struktury.

W ostatniej fazie swojej filozoficznej aktywności, objętej nazwą „nauki niepisanej" (*agrafa dogmata*), wprowadza Platon koncepcję bytowych pryncypiów, najwyższych zasad bytowych: Jedna i Nieokreślonej Dyady (zob. Dembiński, 2003). Podążając za Pitagorejczykami, twierdzi, że istnieją one w hierarchii bytowania na szczycie świata. Istnieją ponad bytem, a więc ponad ideami i są odpowiedzialne za wielość i zróżnicowanie w obrębie idei. W strukturze świata manifestują się jako Jedność i Wielość, Granica i Nieograniczone, i są przyczyną powstawania wszelkich struktur. Jedno jest zasadą wszelkiej tożsamości i określoności, Nieokreślona Dyada zasadą wielości i zróżnicowania. Pierwszym skutkiem oddziaływania zasad są idee. Decydują one o postaci struktur zjawiskowych. Struktury te możemy obrazować za pomocą matematycznych modeli. Stanowi to podstawę poznawalności świata i inicjuje koncepcję matematycznego przyrodoznawstwa (*fisikotera ton mathematon*) (Arystoteles, *Fizyka*, 194a). Warunkiem takiego poznania jest dusza. Aby poznanie istoty rzeczywistości obecnej w ideach-miarach było możliwe, dusza musi się odwrócić (*periagoge*) od tego, co zmysłowe i zmienne, i skierować się ku temu, co wieczne. Ma wtedy możliwość dotknięcia tego, co boskie i wieczne, i uczestnictwa w boskim planie organizacji kosmosu. Myśl dotyka Boga, człowiek zaś uzyskuje wyzwolenie, i upodabnia się do niego (*homoiosis theos*).

Bibliografia

Albert, K., 1991. *O Platońskim pojęciu filozofii*. Tłum. J. Drewnowski. Warszawa: IFiS PAN.

Blandzi, S., 2002. *Platoński projekt filozofii pierwszej*. Warszawa: Wydawnictwo Instytutu Filozofii i Socjologii PAN.

Bohm, D., 1988. *Ukryty porządek*. Tłum. M. Tempczyk. Warszawa: Pusty Obłok.

Dembiński, B., 1999. *Teoria idei. Ewolucja myśli platońskiej*. Katowice: Wydaw. UŚ.

Dembiński, B. 2003. *Późna nauka Platona. Związki ontologii i matematyki*. Katowice: Wydaw. UŚ.

Findlay, J.N., 1974. *Plato: The written and unwritten doctrines.* New York: Humanities Press.

Gadamer, H.G., Schadewaldt, W. (red.), 1968. *Idee und Zahl*: *Studien zur platonischen Philosophie*. Heidelberg: Carl Winter Verlag.

Gaiser, K., 1963. *Platons ungeschriebene Lehre*. Stuttgart: Ernst Klett.

Hadot, P., 1992. *Filozofia jako ćwiczenie duchowe*. Tłum. P. Domański. Warszawa: IFiS PAN.

Hartmann, N., 1958. Systematische Methode. W: *Kleine Schriften*, III Bd, Vom Neukantianismus zur Ontologie. Berlin: DeGruyter.

Jordan, Z., 1937. *O matematycznych podstawach systemu Platona*. Poznań: Poznańskie Towarzystwo Przyjaciół Nauk.

Kijewska, A., Zieliński, E.I. (red.), 1993. *Platon, nowa interpretacja*. Lublin: KUL.

Kramer, H.J., 1990. *Plato and the foundations of metaphysics*. Tłum. J. Catan. New York: SUNY Press.

Lask, E., 1923. *Gesammelte Schriften.* E. von Hergiel (red.). Bd. 1–3. Tübingen: J.C.B. Mohr.

Sayre, K.M., 1983. *Plato's late ontology. A riddle resolved*. Princeton: Princeton University Press.

Matematyka w teologii, teologia w matematyce

Stanisław Krajewski
Uniwersytet Warszawski

Mathematics in Theology, Theology in Mathematics

Abstract

Mathematicians use theological metaphors when they talk in the kitchen of mathematics. How essential is this talk? Have theological considerations and religious concepts influenced mathematics? Can mathematical models illuminate theology? Some authors have given positive answers to these questions, but they do not seem final. It is unclear how religious views influenced the work of those mathematicians who were also theologians. Religious background of some mathematical concepts could have been inessential. Mathematical models in theology have no predictive value. It is, however, important to continue the recently initiated search for the mutual influences of mathematics and theology. (In addition to the references listed at the end of this paper, one can also consult the volume "Theology in Mathematics?" ed. by Stanisław Krajewski and Kazimierz Trzęsicki, Studies in Logic, Grammar and Rhetoric 44 (57), 2016.)

Keywords

philosophy of mathematics, God's point of view, theological metaphors, religious inspirations, mathematical models

Wstęp: matematyka a teologia

Czy zestawianie matematyki i teologii ma sens? Znakomita większość matematyków, nawet znawców podstaw matematyki, odpowie zdecydowanie negatywnie. Podobnie odpowie zapewne większość teologów, choć być może bez tej pewności. Tym bardziej zdziwią się, słysząc o próbach wiązania tak przeciwstawnych nauk, ludzie, którzy mają o nich blade pojęcie. Jedna z tych dyscyplin uosabia bowiem nauki ścisłe, operujące liczbami, strukturami formalnymi, dowodami, czyli obiekty, które – wedle powszechnego mniemania – mogą być całkowicie „opanowane" (oczywiście przez znawców). Natomiast ta druga dyscyplina przynależy do nauk humanistycznych, czyli odnosi się do spraw ludzkich, trudno uchwytnych, oraz boskich, które najtrudniej ze wszystkich jest nam „ogarnąć". Powiązania jednak istnieją. Pojawiają się one na poziomie języka, umysłowości, niektórych pojęć – najważniejsze jest tu pojęcie nieskończoności. Istnieją też próby stosowania matematyki w celu wyjaśnienia kwestii teologicznych oraz poszukiwania wpływów teologii w matematyce.

Nie ma wyczerpujących opracowań całokształtu tych powiązań, choć pojawiły się zbiory tekstów, które omawiają poszczególne zagadnienia i przykłady – również z dawniejszych epok. Na uwagę zasługują następujące publikacje, zawierające artykuły wielu autorów: obszerny tom pod redakcją Teuna Koetsiera i Luca Bergmansa (2005) i zredagowany przez Jamesa Bradleya numer pisma *Theology and Science* vol. 9, nr 1 z roku 2011. Bradley (2011a) przedstawia tradycyjne ujęcie przestrzeni relacji między teologią a matematyką. Niemały rozgłos zyskała książka Grahama i Kantora (2009), opisująca rolę w badaniach matematycznych odegraną przez prawosławną herezję „imiasławie" (por. §3 poniżej). Tematy na pograniczu matematyki i teologii poruszane są też w zbiorze Hellera i Woodina (2011). Poniżej będę się też odwoływał do mojego przeglądu niektórych wątków zawartego w Krajewski (2011a), a także w innych rozdziałach z książki Krajewski (2011) (oraz Heller, Krajewski, 2014).

Jest rzeczą ciekawą – i właściwie zaskakującą – że wszystkie wspomniane publikacje ukazały się niedawno. Większość kwestii w nich omawianych jest znana od dawna, a niektóre należą do kanonu wykształcenia, jak np. historia Pitagorejczyków, ale systematyczne rozpatrywanie dawnych i nowszych przykładów pod kątem wzajemnych oddziaływań matematyki i teologii jest najwyraźniej stosunkowo nowe. Niewątpliwie nie osiągnęło jeszcze apogeum.

1. Teologiczny język matematyków

Wiele wypowiedzi, które w sposób naturalny pojawiają się w rozmowach matematyków, zawiera terminy religijne lub teologiczne. Gdy Michał Heller mówi, że matematyka w jakimś stopniu jest „boskim językiem", wyraża poczucie wielu fizyków i zapewne także innych naukowców, używających matematyki jako języka. Inna wypowiedź ma już sto lat i wyraża uczucia wszystkich niemal współczesnych matematyków. Jeden z największych matematyków w historii, Dawid Hilbert, odnosząc się do matematyki operującej zbiorami nieskończonymi, które wprowadził w swoich słynnych pracach Georg Cantor, wypowiedział słynne słowa: nie damy się wypędzić z raju, „który stworzył nam Cantor" (w odczycie „O nieskończoności", por. Murawski, 1984, s. 296). Wśród matematyków często słyszy się wypowiedzi o tym, że sprawy mają się tak a tak „z boskiej perspektywy", czyli gdy np. nie ma ograniczeń, które uniemożliwiają pewne poczynania nam – ludzkim matematykom. Tak więc w „boskim umyśle" może znajdować się pełne rozwinięcie dziesiętne liczby π lub np. zbiór zdań prawdziwych w jakiejś strukturze matematycznej, czyli wiedza, czy prawdziwe, czy fałszywe są zdania z nieskończonego zbioru zdań, również takiego, którego nie da się opisać algorytmicznie albo nawet w jakikolwiek dostępny nam skończony sposób. Choć my nie mamy takiej wiedzy, możemy ją założyć jako „daną" i na tej podstawie rozumować. Nieco prostszego przykładu dostarcza słynny aksjomat wyboru: możemy założyć, że w jednej chwili dokonaliśmy nieskończenie wielu czynności, polegających na wyborze elementu ze zbioru niepustego, choć przecież naprawdę nie bylibyśmy w stanie tego wykonać, a tylko „Bóg" może to uczynić. W ciągu XX stulecia dowody niekonstruktywne, czyli np. właśnie wymagające nieskończenie wielu „czynności", stały się przyjętą praktyką w matematyce. Ale nadal pamiętamy najbardziej chyba znaną wypowiedź wskazującą na „teologiczne" elementy w matematyce; jest nią reakcja Paula Gordana na podany przez Hilberta niekonstruktywny dowód twierdzenia o istnieniu skończonych baz w pewnych przestrzeniach: „To nie jest matematyka. To teologia".

Czy te i liczne inne wypowiedzi, używające terminologii religijnej lub teologicznej, są czymś w ogóle godnym uwagi jako wskazówka głębszego powiązania matematyki i teologii? Może to tylko retoryka, dziedzictwo czasów, gdy terminy teologiczne były powszechnie używane i każdy miał je na podorędziu, podobnie jak np. metafory rolnicze? Moim zdaniem nie należy z góry negatywnie odpowiadać na pytanie o to, czy używanie teologicznych terminów przez matematyków ukazuje coś istotnego, czy nie. Łatwość, z jaką to czynią, nie zasługuje na lekceważenie.

Ktoś mógłby oponować, zauważając, że w artykułach naukowych i oficjalnych wypowiedziach współczesnych matematyków nie spotyka się terminów religijnych lub teologicznych. To prawda, jednakże taki argument zakłada, że ważne jest tylko to, co się zamieszcza w tekstach oficjalnych. Tymczasem prawdziwe pojmowanie materii matematycznej ujawnia się w wypowiedziach nieoficjalnych: nie w definicjach, ale w ich usprawiedliwianiu, nie w spisanych dowodach, ale w ich ideach przewodnich, nie w dopracowanych teoriach, ale w komentarzach do ich roboczych wersji. Reuben Hersh (1991) ujął to doskonale, wskazując, iż matematyka ma front i tyły, salon i kuchnię. Dla twórców, zawodowców jest strefa tylna, kuchenna. Tam wypowiada się prawdziwe poglądy, formułuje przypuszczenia, używa metafor, które ujawniają wizję przyświecającą „kucharzom", przygotowującym dania dla szerszej publiczności. Z tej pespektywy matematyka jest zupełnie inna niż w wyobrażeniach laików, którzy widzą ustalone, całościowe, pewne, udowodnione wyroby matematycznej kuchni. Bo w trakcie produkcji matematyka jest „fragmentaryczna, nieformalna, intuicyjna, na próbę". I, owszem, używa czasem terminologii religijnej. Może to świadczy o pokrewieństwie matematyki i teologii?

Przykłady te i podobne – opisane nieco dokładniej w Krajewski (2011a) – zasługują na uwagę, ale należy przyznać, że nie są szczególnie przekonujące. Za każdym razem chodzi o metaforę, która może być traktowana jedynie jako obrazowy sposób mówienia, a nie jako wyraz istotnego powiązania problematyki matematycznej z teologiczną. Żeby wyjść poza luźne metafory, należy rozpatrzyć przykłady z historii matematyki, czy może ogólniej – z historii myśli ludzkiej. Można to czynić na trzy sposoby: albo rozpatrywać twórczość filozofów, którzy byli i matematykami, i teologami, albo rozważać religijną genezę poszczególnych pojęć matematycznych, albo wreszcie matematyczne inspiracje lub modele w teologii. Rozpatrzymy po kolei przykłady w ramach każdego z tych podejść w następnych trzech podrozdziałach.

2. Matematycy-teolodzy

W przeciwieństwie do naszych czasów w dawnych epokach nikogo nie dziwili uczeni, którzy uprawiali zarówno matematykę, jak i teologię. Szereg nazwisk jest dobrze znanych, począwszy od wspomnianego już Pitagorasa. Wiadomo, że dla

Platona – podobnie jak dla kolejnych pokoleń jego spadkobierców, aż do naszych czasów – obiekty matematyczne były ważnym przykładem przedmiotów spoza naszego świata, ilustrujących – choćby pośrednio – doskonałe formy, „idee platońskie". Znana jest postać średniowiecznego teologa Mikołaja z Kuzy, który napisał wiele o matematyce, wskazując m.in., że matematycy zajmują się nieskończenie małymi i nieskończenie wielkimi, a celem tych prac jest dotarcie do nieskończoności Boga. Można następnie wspomnieć choćby Pascala z jego słynnym „zakładem", który przypomina o kompetencjach Pascala w zakresie rachunku prawdopodobieństwa. Następnie należy wymienić Leibniza z jego licznymi ideami, które można określić jako próby optymalizacji; chodzi o optimum czy to języka rozważań, czy – kontrolowanego przez Stwórcę – biegu świata. Wśród bliższych nam postaci jest twórca współczesnej teorii zbiorów nieskończonych Georg Cantor, który natknąwszy się na prawie powszechne niezrozumienie dla swoich idei, zaczął ich bronić, odwołując się do teologii. Twierdził, powołując się na św. Augustyna, że liczby naturalne „istnieją jako idee w Boskim Umyśle". Podobnie zresztą mówił Mikołaj z Kuzy. Było to stwierdzenie o tyle istotne dla debaty, w którą Cantor był uwikłany, że w takim razie również kwestionowane przez jego oponentów nieskończone liczby porządkowe i kardynalne mogą równie dobrze istnieć w „Boskim Umyśle". Na ten „umysł" nie można wszak nakładać jakichkolwiek ograniczeń.

Cantor zajmował się też teologią. Argumentował na przykład przeciwko koncepcji niepokalanego poczęcia, twierdząc, że ojcem Jezusa był Józef z Arymatei, ale zarazem niejednokrotnie podkreślał swoją lojalność wobec Kościoła katolickiego, choć formalnie był protestantem. Jednak związek tych zainteresowań z jego dokonaniami matematycznymi nie jest widoczny. Choć sam Cantor twierdził, że to Bóg tchnął w niego nowatorskie koncepcje, trudno się oprzeć wrażeniu, że chodziło o uzasadnianie sensowności tych koncepcji, a nie o istotną inspirację płynącą z matematyki. O tym świadczy historia jego odkryć, które zaczęły się od analizy zbiorów zbieżności szeregów nieskończonych (por. Dauben, 1990). Podobnie jest z innymi uczonymi, którzy działali w obu dziedzinach. O ile zatem używanie terminów teologicznych przez matematyków nie powinno być z góry uważane za nieistotne, o tyle sam fakt zaangażowania w obie dziedziny nie gwarantuje bezpośrednich związków merytorycznych obu dyscyplin. Matematyczne doświadczenie wnosi dyscyplinę myślenia, a z kolei teologia może wnosić szczególną inspirację. Na ile jest ona istotna? Czy prowadzi do stworzenia nowych pojęć naukowych? Aby to stwierdzić, należy zbadać przykłady, które bywają w tym celu powoływane.

3. Odniesienia matematyki do teologii

Podstawowym zachowaniem religijnym jest sprawowanie rytuałów. Rytuały religijne są stare, często prastare. Wedle koncepcji rozwiniętej przez Abrahama Seidenberga w (1962) i w szeregu późniejszych artykułów, to rytuały są u źródeł matematyki.

Potrzeby wynikające z rytuałów, np. odtwarzania rytuałów wyrażających mity początku, doprowadziły do sztuki liczenia oraz rozwinięcia podstawowych pojęć geometrycznych. Niezależnie od tego Seidenberg argumentuje, że podstawowe pojęcia matematyczne zostały wymyślone w jednym miejscu i potem stopniowo przeniknęły na inne tereny – aż objęły cały świat. Hipotetycznym źródłem tych pojęć są Indie, o czym mają zaświadczać stare teksty wedyjskie. To stamtąd w pierwszej połowie drugiego tysiąclecia przed nasza erą wiedzę matematyczną mieli przejąć Babilończycy. Koncepcje Seidenberga, który był znanym algebraikiem, są uznawane za poważne, ale nie są oczywiście bezsporne. Dla niniejszych rozważań ważny jest sam fakt, że można w systematyczny sposób tak opisywać powstanie matematyki. Daje to zaskakujące, bardzo ciekawe i wymowne wskazanie możliwych odniesień matematyki do religii.

Bez porównania bardziej pewna jest historia pojawienia się liczby zero. Wiadomo, że działo się to w Indiach, najpóźniej w piątym wieku, i stamtąd pojęcie zera przewędrowało do świata islamu i Europy. Ważność zera trudno przecenić. Jest niezbędne w dojrzałym zapisie pozycyjnym, bez przesady można rzec, że bez niego nie byłoby komputerów. Wedle Barrowa „Indyjski system liczbowy jest prawdopodobnie najbardziej zmyślną innowacją intelektualną w dziejach ludzkości" (Barrow, 2015, s. 71). Skoro to takie ważne, a nam wydaje się takie proste i naturalne, to pojawia się pytanie, dlaczego wprowadzenie liczby zero miało miejsce w Indiach i to właśnie wtedy.

Oczywiście możliwa jest odpowiedź, że to przypadek, że po prostu wielcy matematycy greccy nie wpadli na taki pomysł. Jednak poszukiwanie kulturowych okoliczności jest celem sensownym – zwłaszcza wtedy, gdy uda się wskazać takie cechy kultury indyjskiej, które były nieobecne w kulturze greckiej, a zarazem stworzyły warunki sprzyjające wyłonieniu się idei zera. Otóż taką cechą jest specyficzny sposób, w jaki religijne tradycje Indii traktują nicość. Zero jest bowiem symbolem dla nicości. Takie przyczyny wprowadzenia zera wskazuje Barrow (2000), a za nim Byers (2007), który zresztą traktuje je jako przykład ogólniejszej prawidłowości, a mianowicie konstruktywnej roli sprzeczności w matematyce: prawdziwie nowe pojęcia są wprowadzane po to, by przezwyciężyć sprzeczność, a zwłaszcza dwa niezgodne ze sobą układy odniesienia. W przypadku zera chodzi o to, że trzeba traktować nicość jako nic i coś zarazem, nieobecność i obecność jednocześnie. Dla Greków nie da się sensownie mówić o czymś, co nie istnieje, a dla Hindusów nicość i pustka była czymś znajomym. Takie „pozytywne nic" przynależy do złożonego, ale spójnego, kompleksu pojęciowego, który ilustruje różne zjawiska – od pustego naczynia do mistycznej pustki. *Sunja* wyraża tę złożoność. Ponieważ jest to spójne pojęcie, mogło otrzymać reprezentację symboliczną w postaci liczby zero. Nazwa zera pochodzi od arabskiego *as-sifr*, czyli określenia pustki, a zarazem tłumaczenia hinduistycznego *sunja*.

Powyższe ujęcie historii zera nie jest jedynym sposobem opisania jego genezy, ale wydaje się zdecydowanie bardziej przekonujące niż inne. Rola religii – w tym przypadku hinduizmu – jest w tym ujęciu istotna i niebanalna.

W połowie dziewiętnastego wieku pojawił się przykład, który dopiero od niedawna jest bliżej rozpatrywany (por. np. Lewis, 2011; Achtner, 2014). Mianowicie Hermann Grassmann wprowadził nowatorskie koncepcje, które stanowiły początek rachunku wektorowego i tensorowego, nowoczesnej algebry liniowej. Przez kilka dziesięcioleci jego pomysły nie były rozumiane i doceniono je w pełni dopiero w dwudziestym wieku. Ciekawe dla naszych rozważań są dwie okoliczności. Po pierwsze Grassmann był zasadniczo teologiem, który zajął się matematyką we własny indywidualny sposób. Po drugie źródło swoich dokonań upatrywał on bardzo zdecydowanie w nauczaniu swojego nauczyciela – filozofa i teologa Friedricha Schleiermachera. W swoich wykładach Schleiermacher miał uczyć właściwego podejścia do badanego problemu, czyli miał dostarczyć metody. Jest to godne uwagi, ale wszystkie tego typu stwierdzenia wypowiadane przez Grassmanna są jednak bardzo ogólnikowe. Na przykład: „Nowe poznanie jest osiągane przez konstruktywną abstrakcję od różnorodności do złożonej jedności, przechodząc przez różne poziomy abstrakcji" (podaję za Achtner, 2014). Co więcej, teologiczna zawartość jego stwierdzeń jest niepewna. Nawet wtedy, gdy Grassmann twierdzi, że „prawda jest wieczna i boska" (w drugim wydaniu *Ausdehnungslehre*), nie jest jasne, jak myślenie religijne wpłynęło na pójście w kierunku coraz większej abstrakcji. Jest to wdzięczny temat badań, ale nie wydaje się potwierdzone, że religia czy teologia wpływała istotnie na treści matematyczne.

Na początku dwudziestego wieku rozwinięte zostały teorie matematyczne, których twórcy odwoływali się do idei religijnych lub teologicznych. Matematyka intuicjonistyczna stworzona przez Luitzena E.J. Brouwera jest zbudowana bez stosowania metod niekonstruktywnych i nawet logicznego prawa wyłączonego środka. U jej podstaw są rozważania w duchu mistycznym. Dla Brouwera były one ważne, ale jego promotor kazał mu usunąć je z pracy doktorskiej. Uważał, że to nie należy do matematyki. Tak samo powiedziałaby znakomita większość współczesnych matematyków. Opinia Brouwera nie powinna jednak być pominięta. Tytuł najpoważniejszej monografii o Brouwerze, praca van Dalena (1999), brzmi: *Mistyk, geometra, intuicjonista*. Ogólniej mówiąc, nie należy lekceważyć źródeł inspiracji. Jeśli mają one charakter religijny, należałoby to uwzględnić. Trzeba jednak przyznać, że często nie jest jasne, jak to uczynić.

Mniej znany, ale bardziej wyraźny jest przykład rosyjskich matematyków, którzy mniej więcej sto lat temu poważnie rozwinęli badania z zakresu deskryptywnej teorii mnogości. Niektórzy z kluczowych uczonych tej szkoły, np. jej twórca Nikołaj Łuzin, korzystali z inspiracji heretycką prawosławną teologią zwaną *imiasławie*. Historia ta stała się znana dzięki książce Grahama i Kantora (2009). Owa teologia polegała na „wysławianiu imienia", a jej heretyckość miała wynikać z tego, że w jej ramach była gotowość do utożsamiania samego imienia Boga z Bogiem. Łuzin był pod wpływem teologa Pawła Florenskiego, który jako pierwszy (por. Kantor, 2011, s. 152) zauważył, że powoływanie niejako do istnienia, czy może bardziej precyzyjnie mówiąc, uobecnianie Boga poprzez wypowiadanie Imienia, jest podobne do postulatu Georga Cantora, wedle którego odpowiednie nazywanie zbiorów nieskończonych jest wystarczające, by stwierdzić ich istnienie. Nazwanie nieskończonej liczby porządkowej wystarczy, nie trzeba osobno dowodzić jej istnienia. Przyjęcie takiego założenia było wówczas wysoce nieoczywiste, choć obecnie na ogół nie budzi wątpliwości. Łuzin uważał też, że należy uwzględniać obok logiki i empirii „rozumienie mistyczno-intuicyjne" (Graham, 2011, s. 161). Można zatem powiedzieć, że to religijne, mistycyzujące podłoże umożliwiło rozkwit znaczącej szkoły matematycznej. I choć również w tym przypadku można twierdzić, że takie same badania matematyczne mogłyby się rozwinąć i bez tego podłoża, to jednak nie da się zignorować faktu, że to właśnie religijne i teologiczne idee ośmieliły do tworzenia nowych konstrukcji matematycznych.

4. Modele matematyczne w teologii

Można napotkać próby stosowania matematyki w teologii. Chodzi o matematyczne ilustracje kwestii teologicznych, a czasem wręcz o konstrukcję czegoś w rodzaju modelu matematycznego. W Krajewski (2011a) podane są przykłady, np. oparty na rozkładzie normalnym Gaussa model Jamesa Millera mający tłumaczyć, iż tylko pozornie paradoksalne jest stwierdzenie, że podporządkowanie się Bogu daje największą wolność, bo gdy rozpatrzymy krzywą Gaussa w „przestrzeni wyborów" życiowych, to ponieważ zgodna ze środkowym położeniem jest względnie największa liczba możliwych decyzji, podporządkowanie się Bogu daje największą swobodę. Inny przykład to odwrócenie metafory, która umożliwia potraktowanie zbioru wszystkich zdań prawdziwych jako wiedzy „boskiej". Mianowicie Post (1974) boskość definiuje jako zbiór zdań prawdziwych w odpowiednim języku. W Krajewski (2011a) zawarta jest teza, że takie modele mają wartość najwyżej metaforyczną. Mogą wspomagać zrozumienie, ale nie są prawdziwymi przykładami modeli matematycznych w sensie, w jakim mówi się o nich w naukach ścisłych. Aby to uzasadnić, chciałbym zwrócić uwagę na dwie cechy modeli matematycznych w naukach ścisłych.

Po pierwsze takie modele muszą ilustrować istotne aspekty modelowanej rzeczywistości. W przypadku teologii nie ma takiej pewności. Zresztą modele matematyczne nie są stosowane w głównych nurtach współczesnej teologii. Nie ma ich np. w olbrzymim dziele zbiorowym pod red. Diller i Kashera (2013), poświęconym właśnie modelom Boga i „ostatecznej rzeczywistości". Nie ma próby wspomnienia o takich propozycjach nawet w rozważaniach, które by się do tego nadawały, np. w eseju poświęconym Mikołajowi z Kuzy.

Druga cecha wartościowych modeli w fizyce i innych naukach to ich moc predykcyjna w odniesieniu do rzeczywistości empirycznej lub twórczy charakter w odniesieniu do teoretycznego opisu empirii. Jak przypomina Michał Heller w (1998), „wszystkie własności kwarków wydedukowaliśmy z matematycznych modeli, w których *nota bene* kwarki początkowo wcale nie występowały”. Nie wydaje się, by modele matematyczne w teologii mogły mieć tak twórczy charakter. Nawet model zainspirowany sformułowaniami Martina Bubera, zaproponowany w Krajewski (2011a), nie ma takiego charakteru. Jest on z pewnością dobrą ilustracją Buberowskiej wizji filozoficzno-teologicznej, ale mimo to nie mam pewności, że ujmuje wszystkie aspekty tej wizji. Główna jej treść jest zawarta w zdaniu „Przedłużone linie relacji przecinają się w wiecznym Ty. Każde pojedyncze Ty jest prześwitem ku niemu” (Buber, 1992, s. 85). Otóż można to zilustrować przy pomocy płaszczyzny rzutowej: punkty w nieskończoności tworzą „prostą w nieskończoności”, która modeluje owo „wieczny Ty”. Jest to o tyle adekwatne, że jeśli dwa punkty połączymy odcinkiem, to przedłużenia tego odcinka w obie strony sięgają tego samego punktu w nieskończoności. Modelujemy zatem idealnie symetrię relacji międzyludzkiej (zakładamy oczywiście, że w tym modelu punkty odpowiadają pojedynczym ludziom). Adekwatność tego obrazu wzmacnia fakt, że modelujemy w pewien sposób transcendencję: prosta w nieskończoności składa się z samych punktów niewłaściwych, więc jest poza światem modelowanym przez zwyczajne punkty płaszczyzny rzutowej. Osiągnięcie owej transcendencji jest możliwe tylko poprzez nakreślenie prostej i rozważenie jej kierunku, czyli tylko przez relację między dwiema istotami z tego świata. Jest więc dokładnie tak, jak chciał Buber. Można iść jeszcze dalej i rozpatrywać standardowy model płaszczyzny rzutowej w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej, czyli półsferę z utożsamionymi przeciwległymi punktami na równiku. Wszystko to nie zmienia jednak faktu, że ten model nie wydaje się dodawać czegokolwiek do pierwotnej wizji teologicznej. Brakuje mu mocy stwórczej, a tym bardziej predykcyjnej.

5. Porównywanie teologii i matematyki

Są różne sposoby zestawiania matematyki i teologii. Oprócz szukania teologicznych inspiracji w matematyce oraz matematycznych ilustracji teologii można jeszcze wskazywać na wspólne obszary zainteresowań. Najbardziej znanym przykładem jest pojęcie nieskończoności. Jednak mimo wspólnej w pewnej mierze historii oraz wspomnianego już wyżej styku matematyki i teologii w twórczości Georga Cantora jest wątpliwe, czy mówiąc o nieskończoności w obu dyscyplinach zajmujemy się tym samym (por. np. Tapp, 2011).

Istnieje jeszcze jeden sposób porównywania: szukanie analogii całościowych, odnoszących się do całości tych dyscyplin. Chodzi zatem o rozważania z zakresu filozofii matematyki i filozofii religii i szukanie ewentualnych paraleli. W Krajewski (2011a) wspomniane są pewne podobieństwa. Jednym z nich jest nieusuwalna obecność tajemnicy: im więcej wiemy, tym bardziej wiemy, że nie wiemy. Jest to wyrażane w teologii poprzez tradycję apofatyczną, a występuje również w matematyce. Na przykład nasza wiedza się wzbogaca, gdy dowiadujemy się, że nie ma wzoru na liczbę π, że problem stopu jest nierozstrzygalny, że nie ma adekwatnej formalizacji teorii liczb naturalnych. Zarazem każde z tych twierdzeń wskazuje na ograniczenia naszej wiedzy, na niemożliwość dania pełnego opisu, przezwyciężenia tajemnicy.

Innym przykładem podobieństwa między matematyką a teologią jest konieczność przyjmowania podstawowych założeń „na wiarę". Oczywiście jest tak w każdej dziedzinie wiedzy, bo w każdej operujemy w ramach paradygmatu, który nie jest wybrany na podstawie dostatecznych racji, co nie znaczy, że jest proponowany w sposób nieracjonalny czy zupełnie arbitralny. Jednak wydaje mi się, że na skraju skali mierzącej subiektywność tej decyzji czy właśnie jej arbitralność, są dwie rozważane tutaj dyscypliny: teologia i matematyka. Choć nie jest jasne, jak sporządzić taką skalę, pozostaje faktem, że pośród wszystkich dziedzin dociekań matematyka i teologia są najbardziej odległe od empirii. Weryfikacja przyjmowanych założeń w żadnej z nich nie odwołuje się do faktów świata fizycznego. Liczą się inne względy: wewnętrzna spójność proponowanych tez w ramach danego systemu, ich płodność, walor estetyczny, zgodność z intuicją. Co prawda intuicja jest ostatecznie kształtowana przez empirię, a w każdym razie również przez fakty empiryczne i ogólniej – przez kontekst kulturowy, jednakże nie ma możliwości bezpośredniego sprawdzania założeń matematycznych czy teologicznych. Przecież przestrzeń fizyczna może być nieeuklidesowa, świat ujęty w opisie matematycznym może mieć wiele wymiarów, w teologii można przyjmować wielu bogów lub tylko jednego, zakładać, że istocie transcendentnej zależy na tym, co czynią ludzie, lub że właśnie nie zależy itp.

Ktoś mógłby argumentować przeciwko tezie o zasadniczo nieempirycznym charakterze teologii, przypominając, że w religii objawionej odwołujemy się do pewnych wydarzeń, a mistyczne ujęcie religii odwołuje się do przeżyć wewnętrznych. Tak jest, jednakże te przeżycia nabierają wartości teologicznej dopiero wtedy, gdy się je odpowiednio zinterpretuje, a to wymaga wniesienia założeń zewnętrznych wobec empirycznej zawartości przeżyć. Można by nadal podważać wyróżnianie matematyki i teologii jako nauk opartych na założeniach zasadniczo nieempirycznych: przecież w każdej nauce jest podobnie, bo zakłada się hipotetyczne byty lub przyjmuje założenia porządkujące. Jednak matematyka i teologia wydają się skrajne: w fizyce trudno by było podważać istnienie materii czy energii, natomiast można podważać istnienie Boga czy zbiorów nieskończonych.

Wydaje się pewne, że teologia mogłaby się rozwinąć zupełnie inaczej niż to się stało. Twierdzę, że również matematyka mogła się rozwinąć inaczej, np. nie wprowadzając struktur aktualnie nieskończonych. Dostalibyśmy wtedy zupełnie inną wizję świata obiektów matematycznych. Alternatywny rozwój innych nauk też jest wyobrażalny, jednak nie aż w tak zasadniczo inny sposób. Powodem jest kontrola empiryczna, której ani nauki ścisłe, ani społeczne nie mogą zignorować.

Wskazane podobieństwa matematyki i teologii są może powodem stosunkowo częstych wśród matematyków zainteresowań kwestiami teologicznymi. Te globalne podobieństwa pozwalają też na nieco optymizmu wobec prób poszukiwania matematycznych ilustracji przydatnych dla teologii oraz teologicznego wpływu na w proces rozwoju matematyki.

Bibliografia

Achtner, W., 2014. Schleiermacher's philosophical-theological contribution to the development of modern tensor calculus in Graßmann's Ausdehnungslehre, odczyt na konferencji "Theology in Mathematics?", Kraków 8–10.06.2014.

Barrow, J., 2015. *Książka o niczym.* Tłum. Ł. Lamża. Kraków: Copernicus Center Press.

Bradley, J. (red.), 2011. *Theology and Science*. Vol. 9, nr 1.

Bradley, J., 2011a. Theology and mathematics – key themes and central historical figures. W: (J. Bradley, red., 2011, s. 5–26).

Buber, M., 1992. *Ja i Ty. Wybór pism filozoficznych*. Tłum. J. Doktór. Warszawa: PAX.

Byers, W., 2007. *How mathematicians think. Using ambiguity, contradiction, and paradox to create mathematics*. Princeton: Princeton University Press.

Dalen, D. van, 1999. *Mystic, geometer, and intuitionist: The life of L.E.J. Brouwer*. Oxford: Oxford University Press.

Dauben, J.W., 1990. *Georg Cantor: His mathematics and philosophy of the infinite*. Princeton: Princeton University Press.

Diller, J., Kasher, A. (red.), 2013. *Models of God and alternative ultimate realities*. Dodrecht: Springer.

Graham, L., Kantor, J.-M., 2009. *Naming infinity: A true story of religious mysticism and mathematical creativity*. Cambridge, Mass: Harvard University Press.

Graham, L., 2011. The power of names. *Theology and Science*, *9*, *1*, s. 157–164.

Heller, M., 1998. *Czy fizyka jest nauką humanistyczną?* Tarnów: Biblos.

Heller, M., Woodin, H. (red.), 2011. *Infinity. New research frontiers*. Cambridge: Cambridge University Press.

Heller, M., Krajewski, S., 2014. *Czy fizyka i matematyka to nauki humanistyczne?* Kraków: Copernicus Center Press.

Hersh, R., 1991. Mathematics has a front and a back. *Synthese*, *88*, s. 127–133.

Kantor, J.-M., 2011. Mathematics and mysticism, name worshipping, then and now. *Theology and Science*, *9*, *1*, s. 149–156.

Koetsier, T., Bergmans, L. (red.), 2005. *Mathematics and the divine: A historical study*. Amsterdam: Elsevier.

Krajewski, S., 2011. *Czy matematyka jest nauką humanistyczną?* Kraków: Copernicus Center Press.

Krajewski, S., 2011a. Uwagi o matematyce i teologii, rozdz. 8 w: (Krajewski, 2011) oraz w: (Heller, Krajewski, 2014).

Lewis, A., 2011. The divine truth of mathematics and the origins of linear algebra. *Theology and Science*, *9*, *1*, s. 109–120.

Murawski, R. (red.), 1984. *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*. Poznań: Wyd. UAM.

Post, J.F., 1974. New foundations for philosophical theology, Quine with God, *The Journal of Philosophy*, *7*, s. 736–748.

Seidenberg, A., 1962. The ritual origin of counting. *Archive for History of Exact Sciences*, *2*, s. 1–40.

Tapp, Ch., 2011. Infinity in Mathematics and Theology. *Theology and Science, 9*, *1*, s. 91–100.

What are the limits of mathematical explanation?

Interview with **Charles McCarty** by **Piotr Urbańczyk**

Piotr Urbańczyk: Our guest is Professor Charles McCarty. He does research in the areas of philosophy of mathematics and philosophy of logic, especially intuitionism, as well as foundations of mathematics and early analytical philosophy. He has written about the history of mathematics and logic, especially of the late 19th and early 20th centuries. Professor McCarty, I would like to ask you, "What is an explanation in mathematics?"

Charles McCarty: I worry that this question – which is raised more frequently of late – may be prompted by an obsession with those results of mathematics that enter into scientific explanations of physical phenomena, even though those applied results may not be characteristic of mathematics overall. For all I know, persistent questions about the explanatory character of proofs are critical to legitimizing those philosophies of mathematics that ape modish philosophies of the physical sciences. Also, I worry that the question betrays a lazy desire to make all mathematical facts as simple as possible in presentation, as if we were spoiled children who must have things spelled out in the most painfully elementary terms. That said, there is a plain difference, a felt difference at least, between mathematical demonstrations that we find revelatory, that give us a sensation of "Aha! Now I know what's going on!" and mathematical demonstrations that may not engender this sensation, although both kinds of demonstration can be perfectly cogent and serve other, more important ends in mathematics. Of course, an annoying problem is to lay authoritatively definitory, and if not definitory, at least explicative hands on that strongly felt but elusive difference. The 'Aha' sensation in mathematics and its various philosophies may prove as resistant to theory as the 'Ho ho' sensations in the aesthetics of comedy.

A close associate of questions about mathematical explanation is the blithe assumption that the goal of mathematical proof is exhausted in producing conviction of some kind, attaining acquiescence to the conclusion(s) of the proof. While a great deal of mathematical proof does serve the purpose of gaining acquiescence, an equally great deal does not serve that purpose at all. A proof – in the language of *Principia Mathematica* (Russell, Whitehead, 1910–1913), for instance – that 1 plus 1 equals 2 certainly has not got conviction in its conclusion as a principal aim, getting readers to agree that 1 plus 1 equals 2 on the basis of a prior grasp of axioms governing higher-order propositional functions specified predicatively. Rather, the provision of such a proof is confirmation (in part) that the system of *Principia Mathematica* and the logicism it implements are sufficient unto some ordinary claims of gradeschool mathematics. The proof forges connections between recognizably mathematical ideas and (at times wildly) philosophical ones, and helps to justify, in its application to the latter, the title 'foundational.' (Here and throughout, I use the word 'proof' to cover epistemic, intensional constructs from a spectrum running from strictly discursive argumentation through demonstrations, constructions, calculations, mathematical thought-experiments, to glossed diagrams.)

Consider a (seemingly nonexplanatory) proof from strictly Dedekindian principles that, when you multiply the integer -1 by itself, you get 1 back. In this, you imagine an integer represented by (or identified with?) a pair of natural numbers under a primitive recursive equivalence relation. Furthermore, you imagine multiplication defined primitive recursively in terms of summed cross-products of the (natural number) components of those pairs. Then, if you run through the calculation that -1 times -1 is 1, following these definitional lines, you see, "Yes – so represented – -1 times -1 equals 1." However, this proof, ingenious as it may be, hardly prompts the "Aha!" sensation. After having read such a proof, few would exclaim, "Wow! Now I see why -1 times -1 equals 1." Rather, Dedekind's calculation serves the narrowly proximal purpose of showing that the pairwise definition of integers and the primitive recursive definition of multiplication for those integers suffice for deriving a certain elementary fact about the integers from similarly elementary facts governing natural numbers. Ultimately, and much more importantly, it helps anoint and crown the Dedekindian vision of natural numbers in terms of calculation by recursion – shocking as it may have seemed originally – as foundational and deeply so. (Do we want to say that, thanks to proofs like this, the Dedekindian, calculative natural numbers won out over the old-time natural numbers, those tied to numeration and mensuration?)

A more explanatory proof of this simple result of integer arithmetic may be a manner of kinesthetic (I would say) demonstration in which you exploit the fact that multiplication by -1 takes hold of the ordinary number line, and swings it through 180 degrees, so bringing it back onto itself – but with positive and negative half-rays reversed. Then, it is patently obvious that multiplying by -1 twice gives you 1 in return. In multiplying by -1 two times, all you do is spin the number line around once, and then one more time to undo the reversal. This kind of proof might well produce the "Aha!" sensation – "Oh, yes! Okay, that's why it works." This reminds us that the word 'demonstration' shares 90% of its etymological DNA with both 'monstrance' and 'monster,' so joining it to 'display' and 'outlandish.'

I would not wish the contrastive characters of the two proofs just mentioned, the calculative and the kinesthetic, to suggest to readers that I am conceiving a contemporary felt distinction between explanatory and non-explanatory proofs either as just another battle in the ancient war between algebra and geometry or as a further guerrilla skirmish fought between the competing mathematical tribes Felix Klein once labeled 'intuitionists' and 'formalists.' Such historical antecedents that today's questions regarding mathematical explanations may boast are a matter for detailed, future investigation (Klein, 1911).

Do repeated questions about proofs as explanations mask issues more important to the foundations of mathematics, once that subject is freed from subjugation to philosophy of mathematics? The foundational issue I have in mind treats of 'proof-cores,' their existence and explication. What are proof-cores? From time to time, they have been called 'proof-constructions' or 'proof-ideas,' even 'calculi.' (Wittgenstein used 'Kalkül' in notebooks that he kept after returning to Cambridge in 1929. Then, he started – we would now say – to extract from discursive, inductive proofs recursive procedures as proof-cores. At that time, he had been poring over [Skolem, 1923]). Speaking metaphorically but with a hope for accuracy, I say that a proof-core is the dynamical engine or principle of a proof such that, once you have a proof-core fully to hand, you truly understand the mathematics of the proof, which includes, but is hardly exhausted by, any corollaries derivable from it. The dynamical, engine analogy is apposite: the word *dynamis* (featuring at least 120 times in the Greek New Testament) denotes a great power, verging on the miraculous, for performing marvelous feats of demonstration.

I hasten to remark that I do not assimilate matters relating to proof-cores, their existence and isolation, automatically to the intellectually distinct matters surrounding explanations. *A fortiori* I do not identify – in advance of much-needed investigation – a proof-core with that feature, if anything, that makes a proof explanatory. In principle, the potential reach of a proof-core is global (as the following example suggests) passing far beyond the formally deductive bounds on any single theory. A proof-core need not unify – to employ current jargon – but it does reveal and showcase a widespread mathematical phenomenon such as deductive incompleteness.

For example, take Gödel's published proof (1931) of his First Incompleteness Theorem. What lies at its core? A linked pair of great breakthroughs: the Arithmetic Fixed-Point Theorem and the Numeralwise Definability of Computable Functions. Both these 'Theorem' titles grant mathematical credentials to interlaced methods, not to isolated statements merely. Once you grasp them as dual proofcores, you can – for one thing – start generating incompleteness results for yourself, you can apply these results to other systems or theories, you can see how to extend them to arithmetized predicates other than 'is not provable.' The little gem by Tarski, Mostowski, and Robinson, *Undecidable theories* (1953) exemplify these processes of extracting, generating, applying, and extending the original Incompleteness Theorem.

There are many more examples in logic. What is at the proof-core of a pedestrian completeness theorem? It may be the processes lodged at the intellectual heart of the Prime Ideal Theorem or the Ultrafilter Extension Theorem: every nontrivial filter in a boolean algebra extends to an ultrafilter. (In intuitionism, this is the validity of the Law of Testability.) As you recognize this idea to be the dynamics behind many completeness theorems, you can start milling out completeness theorems more or less easily for domains other than – for example – conventional first-order logic. Also, you see and can assess those fascinating circumstances in which you cannot make completeness theorems go through, such as a fairly standard completeness theorem for intuitionistic formal logic within a strictly intuitionistic metatheory.

Now, how to isolate and characterize proof-cores? Here, we are talking about constructions in an extended sense of the term (perhaps 'nonconstructive constructions'?) or algorithms in a similarly extended sense. They are not algorithms à la Turing-Church-Gödel, that is, not general recursive procedures. There are times when the application of a proof-core requires great ingenuity and creativity – even good luck. In general, the business is in no way automatic or programmable and may take decades of hard mathematical work, by a squad of mathematicians, to work out plainly. So, grasping a proof-core is having to hand a procedure akin to an algorithm for reproducing a proof (not copying its syntax down blindly), adapting it to new circumstances, applying it more widely, thereby seeing hitherto invisible links among disparate topics.

There is a proof-core to the usual proofs of the Bolzano-Weierstrass Theorem – that among real numbers in a closed, bounded interval, if an infinite number have been selected, then there is an accumulation point. The operative proof-core might be represented by a standard proof, via 'divide and choose,' of König's Lemma. By such means, if I am looking up through an unbounded binary tree, then I can 'trace out' an infinite path running through it. As Kleene proved in *Recursive functions and in-*

tuitionistic mathematics (1952), this manner of tracing out may not be general recursive, even were the original tree primitive recursive.

What kinds of generalized algorithms are proof-cores? Could we have a fixed notation for representing proof-cores? Can we classify proof-cores? In reply, I put two suggestions forward: interested scholars should move away from the philosophy of mathematics to engage with the foundations of mathematics – an area in which we employ all the mathematical tools at our disposal to solve the problems of mathematics and its underpinnings delivered to us by philosophy – rather than pursuing approaches to those questions via strictly dialectical or discursive means. The questions about proof-cores are questions in the foundations of mathematics. Second, I recommend the extraction and regimentation of proof-cores. Close attention to the reverse mathematics of Simpson (1999) may yield more concrete and detailed ideas on how to achieve this.

PU: You have mentioned Gödel's Incompleteness Theorems and, in this context, I would like to ask you, "Are there any limits to mathematical explanation? Can we find places in mathematical phenomena that are so complicated in their natures that we would not be able to explain them?"

CM: That is an interesting question, unless that interest bespeaks an unhealthy fascination in predicting the future. If the area that I sketched out above constitutes a genuine and fruitful approach to understanding what mathematics is via the extraction of proof-cores, if the generalized notion of algorithm needed for that is bounded above and permanently in true complexity, then the answer to your question should be "Yes." Of course, when I say 'bounded above in true complexity,' I mean bounded in a complexity measure akin to but not identical with familiar arithmetical complexity, analytical complexity, or levels of set-theoretic definability. The relevant complexity measure cannot be the same as any of these since, for example, arithmetical complexity does not coincide at all with intelligibility or ease of understanding. The truth predicate for arithmetic, which is non-arithmetic, is likely to be graspable far more readily than any arithmetic set that is complete $\Pi^0_{3,946}$.

If the generalized algorithms that are proof-cores are bounded in true complexity in a meaningful fashion, there will be mathematical phenomena that will never be open to exploration by proof; we will never exert that measure of epistemic control over what goes on in those complex mathematical areas. Gödel seemed to believe (Gödel, 1961, p. 385) that there is no limit of this sort at all. To Gödel's thinking, set theorists are going to explore ever further reaches of the cumulative hierarchy and, as the explorations proceed, their mathematical capacities, which are potentially infinite, will continue to expand without bound. Hence, Gödel's answer to your question about limits would presumably be, "No." However, I do not wish to overlook two alternative possibilities that are yet to be mentioned: first, that some proofs might be 'one-offs,' having no discernible cores in my sense. In that case, the reach of those proofs may extend beyond that of proof-cores. Second, there may be methods leading to mathematical knowledge that are not proofs as currently conceived. As an intuitionist, I cannot, of course, insist right now that the correct answer to your question about limits is, "Either 'Yes' or 'No'."

PU: Why?

CM: The Law of Excluded Third is invalid.

PU: But Hilbert said that we will eventually know everything in mathematics – that there is no "Ignorabimus" in mathematics.

CM: He did indeed say that. In fact, he did more than say it. He wanted to shout it from the rooftops. He did so, in effect, in his 1900 Problems Lecture (Hilbert, 1902) as well as in his last lecture at Königsberg (1930). The latter he closed by referring to the ridiculous or foolish ['töricht' in his German] "Ignorabimus;" he denied flatly that there is "Ignorabimus" in mathematics: "Es gibt kein 'Ignorabimus.'" It seems to me that Hilbert's utterance was among the last manifestations of an optimistic epistemic attitude to pure mathematics that he championed, an attitude more common in the 19th Century. (Study of the writings of 19th-Century mathematician/philosopher Paul du Bois-Reymond, such as his (1882), reveals that it was hardly universal.) On Hilbert's view, there are no permitted limits to our pure mathematical cognition; the reach of such mathematical knowledge will go on extending and extending so that any statable mathematical problem will receive a clearly accessible mathematical solution (which can, under certain circumstances, take the form of an impossibility result), but maybe only after a long time. Hilbert would be more than surprised were he to come back today and discover that we now live in an age thoroughly skeptical about logic and mathematics, with much more talk, both informed and otherwise, about barriers to mathematical knowledge, limits on mathematical cognition, bounds on our intellectual abilities. A lot of that talk is just silly, to be cast adrift in the same boat as such solecisms as 'Human minds are finite.' This skepticism and its succubus pessimism are not called up among us entirely by popular scribbling about Gödel's Incompleteness Theorems and the Unsolvability of the *Entscheidungsproblem*. We live in a long-term bull market for superstition, anti-intellectualism, lapsed confidence in rational powers, crippling self-doubt.

A more thorough examination of the gulf between potential and actual infinity will allow us to grasp more plainly and assess more honestly the true extent of our mathematical gifts. Human cognition in mathematics expands (and contracts) along paths that are potentially rather than either recursively or abstractly infinite. The extensional course of mathematical knowledge traced by its change cannot be a general recursive path. When it comes to human goings-on or thoughts or theories, the relevant infinity often exhibits a potential or modal character. More specifically, given any theorem in an ordinary logical calculus, it is possible that I can produce yet a further, new, and more complicated theorem in the same calculus. It hardly follows from this that I might produce a strictly infinite number of theorems or that it is 'in my competence' to do so. The 'possibly,' 'may,' and 'might' at work at this point are too often cast out of discussion by scholars when they pontificate about intellectual capacities. Famously, in his *Language and mind* (1968), Chomsky offers one version of a fallacious modal argument for the conclusion that human linguistic capacity is strictly infinite. He reasons invalidly from such a premise as, "For every sentence we grasp, it is possible for us to recognize as grammatical another longer sentence whose grammatical structure we can also grasp," to the conclusion, "There is a strictly infinite number of distinct sentences all of which we can recognize as grammatical and assess for grammaticality." Somehow, the 'it is possible' in the premise disappears into the gap between premise and conclusion. You find a kindred error in Dedekind's argument for the existence of actually infinite systems in his (1888). In effect, Dedekind argues, "For every thought I entertain, I can produce and entertain yet another more complicated and different thought. Also, I have what you might call a null thought that is not an output of this facility for producing yet more thoughts. Hence, I have an infinity of thoughts at my disposal." Again, Dedekind seems to have forgotten about the 'can' within his main premise. I insist that the 'can' remain. We must study sets that are defined either modally or intuitionistically: modally – talking about possibilities – or intuitionistically – by exploiting double negations. As you know, double negation is not cancellable intuitionistically. One can pursue a detailed mathematical investigation of either kind of sets. There are clear relations between them given by the Gödel theorem, and its extensions, governing translations between modal logics like S4 and corresponding intuitionistic calculi (Gödel, 1933).

PU: Could you tell us what is the difference between proofs in intuitionistic and classical mathematics?

CM: I am not sure that – in and of themselves – there need be much difference apart from the obvious and superficial. First, intuitionists do not count as valid various inferences mistakenly deemed correct by classical mathematicians. Second, intuitionists who follow Brouwer employ mathematical principles that conventional mathematicians take to be false. If you look at standard articulations of intuitionistic proofs, if you were to write down – in first-order logic, say – the steps in an intuitionistic proof, that is, just the steps in the usual, formalized way, you see that the passages from one statement to the next will all be acceptable to the classical mathematician. What may prove unacceptable to that mathematician is the initial assumptions on which many intuitionistic proofs depend. In part, intuitionism is characterized by such assumptions. These the intuitionist finds intuitive and in future may be able to prove, but are rejected roundly by classical mathematicians. They are principles such as the intuitionistic form of Church's Thesis – every total natural number function into the natural numbers is a general recursive function. They are principles such as the Principle of Uniformity, that is, in any power set, if we label its elements using natural numbers, there must be some number that labels all the elements. They are principles such as Brouwer's Principle for numbers: that every total function from Baire space into itself is continuous.

I want to emphasize that there are axioms of set theory and number theory, analysis and algebra that the classical mathematician and the intuitionistic mathematician will agree about completely: agree about their meanings, agree about their truth, agree about many of their consequences. They include the statements that any set of sets has a union, any set of sets has an intersection, that, given any class function restricted to a set, there will be a set containing all its outputs (the Axiom of Collection). There is an infinite collection, there is an empty set, the Russell class is not a set. All these are points of firm agreement between an intuitionistic set theorist and her classical colleagues, and form the bread-and-butter of the Bishopstyle constructivist (Bishop, 1967).

However, this agreement does not mean that – and these are important, too – our most treasured self-descriptions are going to be the same or even so completely understandable to one another that we can sympathize about mathematics. One uses the word 'understand' in many ways. You can say, "Ah, I finally understand what Joe's doing" to mean "Ah, now I can see what's motivating him. I can show some sympathy for his efforts." That is the sort of understanding that I mean here. Classical mathematicians who are platonists often describe their mathematics or the doing of their mathematics in ways with which I cannot sympathize. They exclaim, "Oh, mathematics is the recording of the details of a rock-hard, crystalline, clear, beautiful domain that is far away somewhere. I'm scanning it through my noetic telescope, and recording what I see of the flora and fauna," as in Hardy (1940). Gosh, that does not sound to me like a fun mathematics, I have to tell you; I guess I am not much of an astronomer or botanist. To me, this astronomical vision of the mathematical enterprise does not seem worth the candle. Doing intuitionistic mathematics is not well compared with looking; it is far more like full, conscious, bodily activity. Robin Collingwood, in his *Principles of art* (1938), described the creative work of the artist as "an imaginary experience of total activity." This powerful thought about arts like painting applies equally well to creative mathematics.

When you describe intuitionistic mathematics in ways by which I can recognize it as my own art, ways in which I might sympathize, it seems more akin to sculpting than to astronomy. In mathematics, I work through a field with my mental fingers, as if I were a blind man playing with clay. I touch a mathematical substance much closer, more tangible, and plastic than some sort of faraway crystal. Its stuff is malleable and bendable, responding more readily to my will. The strong impression of malleability may be due to the fact, insufficiently emphasized, that intuitionistic mathematics is the mathematics of a far greater range of mathematical circumstances than is classical mathematics. The intuitionist deals happily with circumstances that simply do not exist classically. One can prove classically (or better, think to prove) that they do not exist. For instance, in classical mathematics, except for singleton sets, there are no sets that stand in one-to-one correspondence with their full function spaces. In other words, the only standard, classical models of Church's untyped lambda calculus or, if you will, of the von Neumann notion of computing, are singleton sets. Intuitionistically, there is no problem in producing standard models of the type-free calculus of varied sizes. So, the classical mathematician is obliged to made do here with a strictly second-best, with a relatively ponderous mock-up of these situations, where you add topological values or you restrict yourself by considering, not arbitrary functions, but Scott-continuous functions only. That is is perfectly fine in that it is consistent with classical set theory, but it is a register of the sad fact that true models are, in this important case, unavailable even to the extra-terrestrial telescopes of the conventional mathematicians.

PU: But there are also some classical axioms and theorems that are unacceptable for intuitionists, for example, the full Axiom of Choice.

CM: Yes, they are unacceptable because they are demonstrably false. The full Axiom of Choice implies the Law of Excluded Third, as Scott and Diaconescu proved. (See Beeson, 1985, p. 163). Therefore, the full Axiom of Choice is an antitheorem in Brouwer's intuitionistic mathematics.

This does not mean that an intuitionist cannot apply certain restricted axioms of choice. You might have an axiom of choice over the natural numbers, for example. If I have a collection of inhabited sets indexed by natural numbers – let us imagine them as sacks filled with elements, one hanging above each natural number – then such a restricted axiom tells us that there is a function on the natural numbers that selects an element out of each one of those sacks. There are other possible restrictions. For instance, intuitionists can consistently adopt the Presentation Axiom of Choice. The full Axiom of Choice says, "Every inhabited set of inhabited sets has a choice function." The Presentation Axiom of Choice – due to Peter Aczel (1978) – says, "Give me any set X, I can find a set Y of which X is a quotient such that an Axiom of Choice holds when restricted to Y." Another way of putting it is to assert that every set can be covered with a type, if you think of types as sets over which a suitably restricted axiom of choice holds. This axiom holds in intuitionistic circumstances, such as the Kleene realizability universe, where the full Axiom of Choice patently does not.

PU: Thank you very much.

CM: You are most welcome.

Bibliography

Aczel, P., 1978. The type-theoretic interpretation of constructive set theory. In: A. Macintyre *et al*. (Eds.). *Logic Colloquium '77*. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, pp. 55–68.

Beeson, M.J., 1985. *Foundations of constructive mathematics. Metamathematical Studies*. Berlin: Springer-Verlag, pp. XXIII+466.

Bishop, E., 1967. *Foundations of constructive analysis.* New York: McGraw-Hill, pp. XIII+370.

Chomsky, N., 1968. *Language and mind.* New York: Harcourt Brace Jovanovich, pp. VII+88.

Collingwood, R.G., 1938. *Principles of art.* Oxford: Clarendon Press, pp. xi+347.

Dedekind, R., 1888. *Was sind und was sollen die Zahlen?* Braunschweig: F. Vieweg. pp. xv+58.

Du Bois-Reymond, P., 1882. *Allgemeine Functionentheorie. Erster Theil.* Tübingen: Verlag der H. Laupp'schen Buchhandlung, pp. XIV+292.

Gödel, K., 1931. *On formally undecidable propositions of Principia Mathematica and related systems I.* Translated by J. van Heijenoort from the original German and reprinted in: S. Feferman *et al*. (Eds.), *Collected works. Volume I. Publications 1929–1936.* New York, NY: Oxford University Press 1986, pp. 144–195.

Gödel, K., 1933. *On the interpretation of the intuitionistic propositional calculus*. Translated from the original German and reprinted in: S. Feferman *et al*. (Eds.), *Collected works. Volume I. Publications 1929–1936.* New York, NY: Oxford University Press 1986, pp. 301–303.

Gödel, K., 1961. *The modern development of the foundations of mathematics in light of philosophy*. Translated by Eckehart Koehler and William Craig, reprinted in: S. Feferman *et al*. (Eds.), *Collected works. Volume III. Unpublished essays and lectures.* New York, NY: Oxford University Press 1995, pp. 375–387.

Hardy, G.H., 1940. *A mathematician's apology.* London, UK: Cambridge University Press, pp. vii+93.

Hilbert, D., 1902. *Mathematical problems*. Translated by M.W. Newson from the original German and reprinted in *Bulletin of the American Mathematical Society* (Series 2), *8*, pp. 437–439.

Hilbert, D., 1930. *Logic and the knowledge of nature*. Translated by W. Ewald from the original German and reprinted in: W. Ewald (Ed.), *From Kant to Hilbert: A source book in the foundations of mathematics. Volume 2.* Oxford: Clarendon Press 1996, pp. 1157–1165.

Kleene, S.C., 1952. Recursive functions and intuitionistic mathematics. In: *Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Cambridge, Mass., USA. Aug. 30 – Sep. 6, 1950. Volume 1.* Providence: American Mathematical Society, pp. 679–685.

Klein, F., 1911. *The Evanston Colloquium Lectures on Mathematics*. Reprinted in part in: W. Ewald (Ed.), *From Kant to Hilbert: A source book in the foundations of mathematics. Volume 2.* Oxford: Clarendon Press 1996, pp. 958.

Russell, B., Whitehead, A.N., 1910–1913. *Principia mathematica. Volumes I–III.* Cambridge: Cambridge University Press, pp. xiii+666, xxxiv+772, x+491.

Simpson, S., 1999. *Subsystems of second-order arithmetic.* Berlin: Springer-Verlag, pp. xiv+444.

Skolem, T., 1923. *The foundations of elementary arithmetic established by means of the recursive mode of thought, without the use of apparent variables ranging over infinite domains*. Translated by Stefan Bauer-Mengelberg, reprinted in: J. Van Heijenoort (Ed.), *From Frege to Gödel. A source book in mathematical Logic, 1879–1931*. Cambridge, MA: Harvard University Press, pp. 302–333.

Tarski, A., Mostowski, A., Robinson, R., 1953. *Undecidable theories.* Amsterdam: North-Holland Publishing Company, pp. xi+98.

Historia niczego

John D. Barrow, *Książka o niczym*, tł. Łukasz Lamża, Copernicus Center Press, Kraków 2015

Istnieją dwa rodzaje popularyzacji nauki: albo popularyzuje się jedną teorię lub dziedzinę wiedzy, albo wybiera się jakieś kluczowe pojęcie lub zagadnienie i śledzi się jego ewolucję w historii nauki lub w ujęciu wybranych teorii. Ten drugi rodzaj można by nazwać pisaniem monografii popularnonaukowej. John Barrow wybrał to drugie podejście, a swoim kluczowym pojęciem uczynił pojęcie próżni, które jest blisko spokrewnione z pojęciem nicości. Jak się więc okazuje, można pisać „książkę o niczym". To paradoksalne stwierdzenie zostało zręcznie wykorzystane w tytule.

Efekt tytułowego paradoksu jest w książce wielokrotnie eksploatowany. Autor raczy czytelnika licznymi cytatami zaczerpniętymi z różnych źródeł, zaskakującymi słownymi zestawieniami polegającymi na tym, że nic jest czymś, co odnosi się do niczego. Barrow nie byłby Anglikiem, gdyby nie sięgnął do *Alicji w krainie czarów* jako źródła takich paradoksów. Jako przykład niech posłuży motto ze strony 87:

„– Czy widzę kogoś na drodze? Nikogo! – rzekła Alicja.

– Ach, żebym ja miał taki wzrok – powiedział z żalem Król. – Nikogo! Na taką odległość! Ja przy tym świetle widzę tylko tych, co istnieją".

Przykładów takich dostarcza wielka literatura na czele z Shakespearowskim *Wiele hałasu o nic* i wielka nauka z Diracowskimi dziurami w próżni. „Miejsce jest niczym – nawet pustą przestrzenią, dopóki w jego sercu nie mieści się liczba" – też Dirac.

W swojej monografii pojęć związanych z nicością Barrow prowadzi czytelnika poprzez dzieje tych pojęć, począwszy od pustych miejsc w księgach kasowych starożytnych kupców, od których rozpoczęła się zawiła historia zera, aż po abstrakcyjne struktury teorii mnogości; od średniowiecznych sporów dotyczących istnienia próżni, aż do eksperymentalnego jej stwierdzenia przez Torricelliego i Pascala.

Wraz z wejściem na scenę eksperymentu rozpoczynają się dzieje pojęć związanych z próżnią we współczesnej nauce. Czy próżnię należy wypełnić eterem? Czy istnieją wszechświaty puste, w których pustka zakrzywia czasoprzestrzeń? Czy istnieje wiele stanów próżniowych?

Paradoksy czerpane z *Alicji w krainie czarów* bledną w porównaniu z paradoksami produkowanymi przez fizykę kwantową. Próżnia kwantowa nie jest niczym, lecz najniższym możliwym poziomem energetycznym. Ale „najniższy poziom energetyczny" wcale nie oznacza martwej bierności. Próżnia kwantowa wrze nieustannymi, wirtualnymi procesami, które – w zgodzie z prawami fizyki – mogą niekiedy stawać się aktualne. Wówczas z fluktuacji skwantowanej próżni mogą rodzić się wszechświaty, a już istniejące doznawać gwałtownych inflacji.

Jest rzeczą naturalną, że ten pochód przez historię rozpoczyna się od koncepcji najprostszych i zmierza do coraz bardziej złożonych i coraz bardziej oddziaływujących z innymi obszarami wiedzy i kultury. Ważnymi partnerami tych oddziaływań były filozofia i teologia. Jest rzeczą zaskakującą, jak duże rejony filozofii i teologii są zależne od pojęć związanych z nicością.

I tym razem filozofia i teologia przygotowały grunt do powstania problematyki z dziedziny fizyki. W drugiej połowie książki problematyka ta prawie całkowicie wypiera zagadnienia filozoficzne i teologiczne. Barrow zgrabnie ukazuje rozchodzenie się filozofii i nauk przyrodniczych na początku czasów nowożytnych. Warto zauważyć, że to rozchodzenie się nie oznacza, iż pewne zagadnienia przyrodnicze utraciły swój sens filozoficzny, lecz tylko to, że wymagają one innego filozoficznego spojrzenia, a niekiedy zerwania ze starym stylem patrzenia na nie.

Barrow jest fizykiem i właśnie na polu fizyki najpełniej ukazuje swoją maestrię w przedstawianiu trudnej problematyki współczesnych spekulacji fizycznych w prosty i przejrzysty sposób. Jednakże czytelnik pozostaje z pewnym uczuciem niedosytu, nie znajdując w książce filozoficznych komentarzy lub przynajmniej filozoficznych uwag dotyczących omawianych najnowszych koncepcji. Autora można, przynajmniej częściowo, usprawiedliwić tym, że profesjonalni filozofowie jeszcze nie zainteresowali się tą problematyką, która ciągle czeka na swoją filozoficzną „obróbkę". Czytelnik musi zatem, jeśli nie sformułować własne komentarze, to przynajmniej zadać sobie odpowiednie pytania.

Dobra lektura nie polega na biernym przyswajaniu sobie myśli autora, lecz na dialogu z nim. Pozwólmy więc sobie na kilka uwag i spostrzeżeń.

Barrow przypisuje ideę stworzenia świata z nicości biblijnej tradycji żydowskiej (por. ss. 88, 104), ale w Starym Testamencie idea ta była jedynie nieostro zarysowana. Jej filozoficzne opracowanie zostało dokonane nie wcześniej, niż w II wieku po Chr. i było dziełem myślicieli chrześcijańskich.

Barrow przypisuje stworzenie teologii negatywnej Tomaszowi z Akwinu (s. 106), trzeba wszakże zauważyć, że mówiąc o teologii negatywnej, Tomasz jedynie powtarzał doktrynę znacznie wcześniej wypracowaną przez Dionizego Areopagitę (V/VI w.). Sam Tomasz był raczej zwolennikiem tzw. doktryny o analogii bytu, według której nasze wypowiedzi o Bogu odnoszą się do Niego jedynie w sensie analogicznym. Poglądy Augustyna i Tomasza zostały przez Barrowa potraktowane bardzo schematycznie i znacznie bardziej pobieżnie, niż na to zasługują.

Problematykę związaną z nowożytną historią nauki Barrow omówił bardziej szczegółowo. Kompetentnie przedstawił nie tylko poszczególne teorie i modele, lecz również zręcznie ukazał ich wzajemne oddziaływania. Jest rzeczą zrozumiałą, że – zgodnie z punktem widzenia całej książki – Barrow postrzega historię nauki z perspektywy kogoś, kto już wie, do czego ta historia ma doprowadzić.

Także i w części poświęconej nauce nowożytnej Barrow nie ustrzegł się kilku nieścisłości. Aleksandr Friedman znalazł rozwiązania równań Einsteina ze stałą kosmologiczną jedynie dla przypadku z dodatnią i ujemną krzywizną przestrzeni. Jest rzeczą zastanawiającą, że pominął on przypadek zerowej krzywizny przestrzeni (s. 249). Nie jest również prawdą, że George Lemaître „znalazł samodzielnie kilka nowych rozwiązań równań Einsteina” (s. 252) ze stałą kosmologiczną (także ze stałą kosmologiczną równą zeru). Znalazł on wszystkie rozwiązania w klasie modeli przestrzennie jednorodnych i izotropowych (także i rozwiązania pominięte przez Friedmana).

W ostatnich rozdziałach książki Barrow dokonuje przeglądu najnowszych modeli kosmologicznych, w których pojęcie próżni odgrywa kluczową rolę. Tak się składa, że te modele i związane z nimi koncepcje obejmują większość badań obecnie prowadzonych w kosmologii. Panorama przedstawiona przez Barrowa jest rzeczywiście fascynująca. Uczciwie podkreśla on wysoce hipotetyczny charakter tych badań. W miarę jednak wnikania w mechanizmy inflacji, teorii strun kosmicznych, kwantowych kreacji i teorii wielkich powrotów, czytelnik nabiera skłonności stopniowego zapominania o ich hipotetycznym charakterze i zaczyna je traktować jako ostatnie słowo nauki. Warto jednak nie zapominać, że te fascynujące koncepcje są oparte o założenia niepotwierdzone żadnym doświadczeniem, a jedynie wspierane racjami teoretycznymi. Niekiedy także sami uczeni zdają się o tym nie pamiętać. Na przykład, wiele koncepcji omawianych przez Barrowa zakłada istnienie pewnego pola skalarnego, tzw. inflatonu. Wydaje się, że w wielu pracach naukowych istnienia inflatonu nawet się nie dyskutuje lecz przyjmuje za coś niemal oczywistego. Co więcej, w różnych pracach przypisuje się mu bardzo różne własności.

Książka o niczym nie ma zakończenia. Nie może go mieć, ponieważ nauka go jeszcze nie dopisała. Obecnie wszystko pozostaje na etapie domysłów i fascynujących hipotez. Ciekawe, z jakim odczuciem książkę Barrowa będzie czytał historyk nauki za, powiedzmy, pięćdziesiąt lat? Jaki będzie dalszy ciąg historii niczego?

Michał Heller i Janusz Mączka

O roli filozofii biologii w edukacji biologicznej

The Philosophy of Biology. A Companion for Educators, Kostas Kampourakis (ed.), Springer, Dordrecht 2013, ss. 762.

W Przedmowie (s. vii-ix) do *The Philosophy of Biology. A Companion for Educators* amerykański filozof Michael Ruse pisze: „My filozofowie myślimy o strukturze, o dowodach, o klasyfikacji, o związku między faktami, i wielu innych kwestiach. Biolog-praktyk musi znać prawo Hardy'ego-Weinberga. Biolog-praktyk musi znać cykl Krebsa. Biolog-praktyk musi znać kod genetyczny. Ale musi również mieć narzędzia, metody, aby wyjść poza to i rozszerzyć naszą wiedzę dla następnych pokoleń. To tutaj filozofia nie jest po prostu ważna. Ona jest fundamentalna. […] Świat widziany przez biologię, poinformowany przez filozofię! To triumf i radość!" (s. ix). Przytoczone słowa jednego z najwybitniejszych współczesnych filozofów biologii mogą być dobrym streszczeniem recenzowanego tomu, poświęconego doniosłej, ale wciąż mało docenianej przez środowiska naukowe, roli filozofii w edukacji biologicznej.

Z *Wprowadzenia* (s. 1–29) Kostasa Kampourakisa dowiadujemy się, że fraza „biologiczna edukacja", często używana w omawianej książce, odnosi się zarówno do szkół średnich, jak i uniwersytetów. Autor przekonuje, że filozofia biologii może wiele wnieść do edukacji biologicznej, głównie w dwóch obszarach: (a) rozumienia pojęć i (b) rozumienia natury nauki. K. Kampourakis stoi na stanowisku, że programy nauczania biologii, już na poziomie szkoły średniej, a zwłaszcza na szczeblu uniwersyteckim, winny brać pod uwagę filozoficzne kwestie podnoszone przez nauki biologiczne. Chociaż szczegółowe omówienie tych zagadnień nie zawsze jest możliwe w ramach lekcji czy wykładu, nauczyciele biologii powinni się z nimi zapoznać i odpowiednio przedstawić je swoim słuchaczom. Wzorcowy program nauczania biologii winien zawierać, zdaniem K. Kampourakisa, następujące elementy:

(1) *Ewolucyjne ramy*: teoria ewolucji jest centralną jednoczącą teorią w biologii, która wyjaśnia zarówno jedność i różnorodność życia. Zatem, ewolucyjne ramy powinny stanowić podstawę do nauczania o wszystkich zjawiskach biologicznych i pochodzeniu form żywych oraz ich funkcji;

(2) *Rozwojowa perspektywa*: edukacja biologiczna nie może skupić się na DNA i genach, a następnie wykonać skok do organizmów i ich fenotypów. Winna zmierzać do wyjaśnienia, że rozwój jest złożonym procesem, w którym DNA jest ważnym, ale nie jedynym czynnikiem;

(3) *Zintegrowane podejście*: nowe pola badawcze ewolucyjnej biologii rozwoju i biologii systemów wymagają zintegrowanego podejścia do badań biologicznych. W ramach edukacji biologicznej należy jasno komunikować, że życie wymaga nie tylko DNA, ale również kompleksowej maszynerii komórkowej, oraz że organizmy składają się z licznych interakcji i współzależnych części;

(4) *Społeczno-etyczny wymiar*: nauki o życiu mają bezpośredni wpływ na wiele aspektów życia ludzkiego. W nauce kryje się coś więcej niż tylko dążenie do wiedzy. Badania zależą również od środków finansowych, osobistych ambicji i potencjalnych korzyści, a także mają szereg implikacji dla życia ludzkiego;

(5) *Współczesne spojrzenie*: w erze post-genomowej ważne jest, by edukacja biologiczna była odpowiednio aktualizowana.

Wymienione cechy tworzą podstawową strukturę książki. Wszystkie rozdziały stanowią rozwinięcie jednej lub więcej z tych cech. Streśćmy krótko treść poszczególnych rozdziałów recenzowanego tomu.

W pierwszym z rozdziałów, zatytułowanym *Czym jest życie?* (s. 31–48), autorzy Carol E. Cleland i Michael Zerella, koncentrują się na fundamentalnym dla biologii i jej filozofii pytaniu o naturę życia. Przekonują, że filozoficzne próby odpowiedzi na to pytanie są szczególnie przydatne dla naukowców, którzy często prowadzą swoje badania w obliczu głębokiej niepewności co do natury tego, co studiują. Odpowiedź na pytanie „czym jest życie?" jest niezwykle ważna, może mieć bowiem praktyczne konsekwencje dla prowadzonych badań biologicznych. Zgłębianie samego życia, które obejmuje badania nad jego pochodzeniem i zakresem we Wszechświecie oraz możliwości tworzenia życia w laboratorium, muszą być poprzedzone przynajmniej wstępnym zrozumieniem, czym jest życie.

Rozdział zatytułowany W*yjaśnianie biologiczne* (s. 49–65), autorstwa Angeli Potochnik, poświęcony jest różnym rodzajom wyjaśnień stosowanych w naukach biologicznych. Jednym z głównych celów nauki jest wyjaśnianie. Naukowcy starają się odkryć, dlaczego konkretna rzecz dzieje się tak, a nie inaczej. Autorka omawia, jakie rodzaje wyjaśnień są formułowane w biologii. Najbardziej palącym problemem biologicznego wyjaśnienia jest to, zdaniem A. Potochnik, w jaki sposób uwzględnić szeroką gamę stylów objaśniających występujących w tej dziedzinie nauki.

Marc Lange w rozdziale *Czy można mówić o prawach przyrody w naukach o życiu?* (s. 67–85) pozostaje w opozycji do współczesnych zwolenników redukcjonizmu w biologii. Wyższe poziomy organizacji (organizmalny, ekologiczny i społeczny) mogą, jak twierdzi, przynieść ze sobą nowe wyjaśnienia, które są nieredukowalne do tych dostępnych na najbardziej podstawowym poziomie. Nauki o życiu mogą dostarczyć odrębnego rodzaju wyjaśnienia, mimo że byty ożywione są zbudowane tylko z fizycznych elementów. To pokazuje, dlaczego biologia ma status autonomicznej, nieredukowalnej do fizyki i chemii, dyscypliny naukowej.

W kolejnym rozdziale, *Natura biologii ewolucyjnej: na pograniczu nauki historycznej i eksperymentalnej* (s. 87–100), Massimo Pigliucci opisuje i wyjaśnia naturę biologii ewolucyjnej, która łączy w sobie elementy zarówno nauki eksperymentalnej, jak i historycznej. Tymczasem, biologia ewolucyjna, jak zauważa, jest często nauczana w wąskiej perspektywie, w oderwaniu od kontekstu historycznego. Biologia ewolucyjna, co nie umyka uwadze autora, jest często postrzegana jako czysto opisowa nauka oparta na obserwacji. M. Pigliucci pokazuje, że oba podejścia, historyczne i eksperymentalne, mają kluczowe znaczenie dla zrozumienia historii życia na Ziemi.

W rozdziale *Teoria ewolucji i epistemologia nauki* (s. 101–119), Kevin McCain i Brad Weslake przytaczają różne zarzuty wysuwane przeciwko teorii ewolucji: że jest to tylko „teoria", że nie może być udowodniona, że niczego nie prognozuje itp. Autorzy odpowiadają na te, bezpodstawne, ich zdaniem, krytyki. Teoria naukowa wymaga dowodów empirycznych, a w przypadku teorii ewolucji istnieje wiele dowodów pochodzących z niezależnych źródeł. K. McCain i B. Weslake wyjaśniają też, że teorie naukowe nie robią prognoz na własną rękę, ale w połączeniu z innymi, tzw. pomocniczymi, hipotezami. W przypadku nieudanych przewidywań naukowych często odrzucane są tylko hipotezy, a nie same teorie.

W następnym rozdziale, *Koncepcyjna zmiana i retoryka teorii ewolucji: „Force Talk" jako studium przypadku i wyzwanie dla pedagogiki* (s. 121–144), David Depew zatrzymuje się na retoryce teorii ewolucji. Autor starannie rozróżnia między poglądem Darwina na dobór naturalny jako długi proces wyboru konkretnych wariantów spośród innych i poglądem Herberta Spencera o szybkiej eliminacji indywiduów z wyjątkiem tych, które mają przewagę. Kreatywna rola, którą K. Darwin przypisuje do doboru naturalnego, została reaktywowana w połowie XX w. przez populacyjną genetyczną teorię doboru naturalnego. Darwinizm z nowoczesnej syntezy w istotnych aspektach różnił się od darwinizmu samego Darwina. D. Depew zauważa, że współczesny darwinizm zaczyna wyglądać bardziej jak darwinizm samego K. Darwina, niż jak darwinizm w nowoczesnej syntezie.

Tematem kolejnego rozdziału, *Debata na temat mocy i zakresu adaptacji* (s. 145–160), Patricka Forbera, jest jedno z centralnych pojęć teorii ewolucji, jakim jest adaptacja. Autor podkreśla, że adaptacja odnosi się do procesu, jak również do każdej cechy, która powstała w wyniku selekcji lub cechy, która nadaje przewagę w stosunku do jej posiadaczy. P. Forber wyjaśnia także różnicę między empirycznym, metodologicznym i wyjaśniającym adaptacjonizmem. Empiryczne pytania, np. o występowanie adaptacji w świecie biologicznym, są odrębne od kwestii metodologicznych, jak należy badać świat szukając adaptacji, jak również od wyjaśnień sformułowanych dla nich na podstawie doboru naturalnego.

Czy istnieje konflikt między religią i teorią ewolucji? Odpowiedź na to pytanie jest tematem kolejnych dwóch rozdziałów. W rozdziale *Biologia i religia: Przypadek ewolucji* (s. 161–177), Francisco Ayala rozważa „argument z projektu". Argument ten składa się z dwóch części: pierwsza utrzymuje, że istnieje projekt we Wszechświecie, podczas gdy druga część twierdzi, że tylko wszechmocny i wszechwiedzący Stwórca mógłby wyjaśnić ten projekt. Autor wyjaśnia, jak „argument z projektu" został wykoncypowany przez wieki. Następnie, zwracając się do K. Darwina, zauważa, że najważniejszym jego osiągnięciem nie były zgromadzone dowody na rzecz ewolucji, ale to, że udało mu się dostarczyć naukowego opisu adaptacji organizmów jako efekt procesów naturalnych. F. Ayala zauważa, że od czasu Darwina została zgromadzona ogromna ilość kopalnych dowodów na zachodzenie ewolucji, w tym skamieniałości tzw. brakujących ogniw. Autor w konkluzji stwierdza, że nauka i religia dotyczą różnych aspektów ludzkiego doświadczenia, i nie może być mowy o jakimkolwiek konflikcie między nimi.

Kolejny rozdział, *Implikacje biologii ewolucyjnej dla wiary religijnej* (s. 179-204), Denisa Alexandra, jest kontynuacją tematu z poprzedniego rozdziału. Autor zauważa, że implikacje biologii dla przekonań religijnych różnią się znacznie w zależności od rozpatrywanej religii. Swoją uwagę koncentruje na chrześcijaństwie i przedstawia tło historyczne relacji między religią chrześcijańską i biologią ewolucyjną. Następnie opisuje cztery modele, które są wykorzystywane do opisu relacji między nauką a religią: (a) model konfliktu – nauka i religia są w fundamentalnej opozycji, (b) model NOMA – nie może być konfliktu między nauką a religią, ponieważ zajmują się innego rodzaju pytaniami, (c) model fuzji – rozróżnienie między naukowymi i religijnymi typami wiedzy jest całkowicie zamazane, lub nauka jest wykorzystywana do budowy systemów religijnych, czy odwrotnie oraz (d) model komplementarności – nauka i religia są odnoszone do tej samej rzeczywistości z różnych perspektyw, zapewniając nie rywalizujące, ale uzupełniające się, wyjaśnienia. D. Alexander w konkluzji stwierdza, że nie ma powodu, aby biologia i religia miały być w konflikcie, zwłaszcza, że wiara religijna odegrała ważną, pozytywną rolę w rozwoju nauk biologicznych.

Następny rozdział pt. *Inteligentny projekt i natura nauki: punkty filozoficzne i pedagogiczne* (s. 205–238), *autorstwa* Ingo Brigandta, poświęcony jest współczesnej formie kreacjonizmu, jaką jest koncepcja *Inteligentnego Projektu (ID)*. Autor koncentruje się m.in. na idei, wyrażonej przez Williama Dembskiego, że organizmy są tak skomplikowane, że jest bardzo mało prawdopodobne, by wywodziły się z naturalnych procesów ewolucyjnych. I. Brigandt nie podziela tego stanowiska. Wyjaśnia, że niczego nie można wnioskować o prawdopodobnej prawdzie lub fałszu jakiejś hipotezy na podstawie jej małego prawdopodobieństwa, nieważne jak małe ono jest. Prawdopodobieństwa szeregu wielu pojedynczych zdarzeń będą małe i cykl zdarzeń z małym prawdopodobieństwem zdarza się cały czas w przyrodzie. I. Brigandt wyjaśnia różnicę między naturalizmem metodologicznym i metafizycznym. Metodologiczny naturalizm uznaje, że nauka nie bada elementów nadprzyrodzonych, bez względu na to, czy istnieją, czy też nie, natomiast metafizyczny naturalizm zaprzecza istnieniu jednostek nadprzyrodzonych i twierdzi, że istnieją jedynie naturalne. Autor konkluduje, że *ID* jest całkowicie nienaukowym podejściem.

Michael Dietrich, w rozdziale zatytułowanym *Ewolucja molekularna* (s. 239–248), wyjaśnia, że ewolucja molekularna była postrzegana jako alternatywna dla ewolucji na poziomie organizmu, a nie jako komplementarna, mimo że taką w rzeczywistości, jak twierdzi, jest. Przepaść między poziomem organizmu i poziomem molekularnym w świadomości biologów powstała, zdaniem M. Dietricha, gdy zasugerowano, że różne procesy przyczynowe dominują na każdym z wymienionych poziomów: selekcja na poziomie organizmu, zaś dryf na poziomie molekularnym. Autor stoi na stanowisku, że kluczowym punktem jest zrozumienie dryfu jako przyczynowego procesu będącego w interakcji z selekcją. Dryf był silnie związany z ewolucją molekularną i był postrzegany jako przeciwieństwo selekcji, pomimo, że oba procesy odbywają się na poziomie molekularnym. Obecnie uważa się, że ewolucja molekularna jest wynikiem złożonej wzajemnej zależności dryfu i doboru.

W następnym rozdziale, *Lekcje edukacyjne z ewolucyjnych właściwości genomu* (s. 249–265), John Avise koncentruje się na roli selekcji na poziomie genów. Chociaż to nie jest jedyny poziom, na którym selekcja naturalna działa, jednak jest on niezmiernie ważny.

Rozmnażanie płciowe ma ten skutek, że selekcja może działać na poziomie genów, ponieważ geny w rekombinacji genomów czasami mogą zwiększyć swoje szanse na przetrwanie, działając przeciwko „interesom" genomu i organizmu gospodarza. Uświadomienie sobie, że dobór naturalny działa na poziomie genu, było głównym koncepcyjnym przełomem, który pomógł wyjaśnić wiele enigmatycznych molekularnych cech genomów.

Czy ewolucja zależy wyłącznie od zmian w sekwencjach DNA? Odpowiedź na to pytanie jest tematem rozdziału Tobiasa Ullera pt. *Nie-genetyczne dziedziczenie i ewolucja* (s. 267–287). Autor najpierw przedstawia krótki opis, jak dziedziczność stała się obiektem badań naukowych w XIX w. Wraz z rozwojem genetyki Mendla nacisk położono na geny i dziedziczność stopniowo zaczęła oddzielać się od rozwoju. Dzięki nowoczesnej syntezie, ewolucja została matematycznie sformalizowana i odtąd została opisana jako zmiana częstości genów; rozwój został całkowicie zignorowany. W końcu powrócono do rozważań biologicznych w kontekście nie-genetycznych źródeł transmisji od rodziców do potomstwa jako alternatywnych systemów dziedziczenia. T. Uller wyjaśnia, że poprzez uznanie nie-genetycznych mechanizmów dziedziczenia, możliwe jest rozpatrywanie procesów rozwojowych w ewolucyjnych wyjaśnieniach.

Podobieństwa między procesami rozwojowymi różnych gatunków, będące dowodami ich ewolucyjnego pokrewieństwa, są tematem rozdziału *Homologia* (s. 289–322), Alessandro Minelliego i Giuseppa Fusco. Organizmy wykazują zarówno podobieństwa, jak i różnice. Różnice są zazwyczaj spowodowane nagromadzeniem nowych cech w procesie ewolucji. Podobieństwa zaś są często ze względu na wspólne pochodzenie, to znaczy, że pochodzą od wspólnego przodka. Takie podobieństwa są zwykle definiowane jako homologia. Autorzy wykazują, że koncepcja homologii dla prostej zależności między dwiema strukturami jest niewystarczająca i należy zastąpić ją koncepcją homologii zależną od kontekstu.

Relacje między studium rozwoju i badaniami nad ewolucją są przedmiotem ogromnego pola badawczego, które ewolucyjna biologia rozwoju nazywa mianem *evo-devo* (*evolutionary developmental*), a co jest tematem następnego rozdziału Alana Love'a zatytułowanego *Nauczanie ewolucyjnej biologii rozwoju: koncepcje, problemy i kontrowersje* (s. 323–341). A. Love zwraca się w stronę ewolucyjnej biologii rozwoju, bardzo aktywnego obszaru badań naukowych, który skupia się na tym, jak ewoluuje rozwój, jak również na tym, jaki ma to wpływ na rozwój cech organizmu. Autor opisuje koncepcyjne podstawy *evo-devo* i znaczenie kluczowych pojęć, takich jak ograniczenia, modularność i ewolucyjność. A. Love w konkluzji stwierdza, że musimy nauczyć się więcej niż jednego obrazu nauki w celu odpowiedniego prezentowania jej różnych aspektów.

Rozdział Jamesa Justusa zatytułowany jest *Zagadnienia filozoficzne w ekologii* (s. 343–371). Autor stwierdza, że choć ekologia jest ważna dla biologii w ogóle, a dla teorii ewolucji w szczególności, mniej uwagi poświęca się filozoficznym zagadnieniom ekologii. J. Justus koncentruje się zwłaszcza na toczonych przez dziesięciolecia debatach na temat cech społeczności biologicznych, jak również na kwestiach metafizycznych dotyczących ich realności. Autor jest przekonany, że dowody paleologiczne wskazują, że mogą istnieć ponadorganizmalne społeczności jako wewnętrznie regulujące się systemy, które są czymś więcej niż tylko sumą poszczególnych jednostek. Spór o to, czym są prawa przyrody, i czy istnieją w ekologii, to następny temat, podjęty przez J. Justusa. Koncentruje się on na konkretnych uogólnieniach i dyskutuje, czy zasługują one na miano prawa, czy też nie.

Innym obszarem badań biologicznych, który jest bardzo ważny dla zrozumienia ewolucji, a który nie jest znacząco uwzględniany w edukacji biologicznej, jest mikrobiologia. To temat rozdziału zatytułowanego *Małe rzeczy, wielkie konsekwencje: mikrobiologiczne perspektywy biologii* (s. 373–394), Michaela J. Duncana, Pierricka Bourrata, Jennifer DeBerardinis i Maureena O'Malley'a. Autorzy podkreślają, że biologia molekularna wyłoniła się z badań mikroorganizmów, które później wykorzystywano jako narzędzia w biotechnologii. Drobnoustroje znajdują się wszędzie w świecie żywym, wokół, na, lub w organizmach wielokomórkowych. Autorzy twierdzą, że istnieje głęboka współzależność wszelkiego życia od drobnoustrojów. Badania w dziedzinie mikrobiologii wykazały, jak podkreślają, że „indywidualność biologiczna" jest bardziej skomplikowana niż sądzono, i w wielu przypadkach jest trudno oddzielić wielokomórkowe organizmy od ich symbiotycznych mikroorganizmów. Im bardziej współzależne są, tym bardziej będą one funkcjonować i rozwijać się jako jeden superorganizm. Autorzy konkludują, że wszelkie wnioski w obszarze badań biologicznych powinny być badane przed i uwzględniane po tym, co wiemy o mikrobach.

Kolejne dwa rozdziały analizują dwa ważne tematy, które są bezpośrednio związane ze zrozumieniem ewolucji: esencjalizm i teleologię. W pierwszym rozdziale zatytułowanym E*sencjalizm w biologii* (s. 395–419), John Wilkins wyjaśnia, czym jest esencjalizm i czy biologia była lub jest esencjalistyczna. Zauważa, że słowo to ma kilka różnych znaczeń i wylicza sześć typów esencjalizmu: psychologiczny, ludzki, logiczny, metafizyczny, naukowy i biologiczny. Wyjaśnia następnie trzy główne formy esencjalizmu dostępne dla każdego z wymienionych typów: konstytutywny (klasa obiektów, w której istnieją inwariantne cechy), diagnostyczny (klasa obiektów rozpoznawana, ponieważ wszyscy członkowie dzielą te same istotne cechy) i definicyjny (rodzaje mają różne i wspólne zdefiniowane cechy). Autor wyjaśnia, że biolodzy przed i po Darwinie, łącznie z samym Darwinem, byli esencjalistami jedynie w konstytutywnym znaczeniu.

W następnym rozdziale zatytułowanym *Biologiczna teleologia: potrzeba historii* (s. 421–454), James Lennox przeprowadza analizę pojęcia „teleologia” i jego relacji do biologii. Najpierw podaje historyczny opis teleologii zaczynając od Platona i Arystotelesa, przez Raya i Boylea do Paleya i Cuviera. Podczas gdy Platon uważał, że świat przyrody jest dziełem Boskiej Istoty rozumnej, Arystoteles bronił naturalnej teleologii, wolnej od platońskiego założenia. Darwin był świadomy argumentów Paleya i Cuviera, którzy realizowali różne podejścia teleologiczne, odpowiednio, wewnętrzne platońskie i zewnętrzne arystotelesowskie. Ta historyczna analiza przygotowała J. Lennoxowi grunt do rozróżnienia między dwoma rodzajami teleologicznych wyjaśnień: (a) teleologiczne wyjaśnienia bazujące na projekcie (sugerują, że cecha istnieje dla jakiegoś celu, ponieważ intencjonalnie została tak zaprojektowana, aby ją spełniać), i (b) teleologiczne wyjaśnienia oparte na doborze naturalnym (wyjaśniają obecność cechy w populacji, sugerując, że zostały wybrane ze względu na korzystne skutki dla organizmów, które ją posiadają).

Rozdział Arno Woutersa zatytułowany *Perspektywa w funkcjonalnej biologii: role, korzyści i organizacja* (s. 455–486), skupia się na funkcjach biologicznych. Autor przekonuje, że perspektywa funkcjonalna jest właściwą perspektywą do rozwiązywania wielu problemów biologicznych. Jednym z takich problemów, wciąż nierozwiązanym, jest to, czym jest bycie żywym. Zdaniem A. Woutersa, funkcje mogą być przydatne do rozwiązania tego problemu. Czy organizm zdoła pozostać przy życiu, czy też nie, zależy nie tylko od jego indywidualnych cech, ale także od ich układu jako całości i koordynacji działań. Zauważa również, że wyjaśnienia funkcjonalne są niezależne od założeń dotyczących pochodzenia poszczególnych cech. W tym sensie, pojęcie funkcji różni się od pojęcia adaptacji, oraz wyjaśnienia funkcjonalne są oddzielone od wyjaśnień bazujących na selekcji naturalnej. A. Wouters podkreśla również, że nieporozumieniem jest uważać, że perspektywa funkcjonalna opiera się na analogii między funkcją i projektem.

Autorem kolejnego rozdziału zatytułowanego *Rozumienie mechanizmów biologicznych: korzystanie z ilustracji badania rytmu dobowego* (s. 487–510), jest William Bechtel. Podejście dekompozycji mechanizmów na części zostało scharakteryzowane jako strategia redukcjonistyczna. Autor uważa, że badanie zjawiska na niższym poziomie nie może jednak zapewnić wystarczającego wyjaśnienia, ponieważ składniki mogą działać inaczej na własną rękę, aniżeli, gdy należą do całości. Ponadto, w celu wyjaśnienia zjawiska wymagane jest, jak twierdzi, by posiadać dodatkową wiedzę na temat organizacji wyższych poziomów, których cały mechanizm jest tylko częścią. W. Bechtel konkluduje, że zrozumienie mechanizmów może przyczynić się do lepszego zrozumienia zjawisk biologicznych, chociaż samo w sobie jest niewystarczające do pełnego ich wyjaśnienia.

Idea, że DNA zawiera jakiś rodzaj informacji w ramach swojej struktury, jest tematem rozdziału Alfredo Marcosa i Roberta Arpa zatytułowanego *Informacja w naukach biologicznych* (s. 511–547). Autorzy zaczynają od wprowadzenia historycznego na temat koncepcji i natury informacji. Następnie, kierują swoją uwagę w stronę „bioinformacji" i dostarczają kilka przykładów informacji z dziedziny nauk biologicznych: synteza DNA i białek, mikroorganizmy i ich środowisko, komunikacja neuronalna, percepcja wzrokowa, interakcja między komponentami środowiska wewnętrznego organizmów lub między sobą i ich otoczeniem zewnętrznym. A. Marcos i R. Arp podkreślają, że informacja jest charakterystyczną cechą organizmów, związaną z pojęciem funkcji. Twierdzą także, że DNA jest „informacyjny" tylko w odniesieniu do danego kontekstu komórkowego. W szczególności, bioinformatyka jest pomyślana jako triadyczna relacja, z udziałem trzech jednostek: wiadomość, odbiorca i układ odniesienia, który komunikat przekazuje odbiorcy.

O potrzebie systemowego podejścia w badaniach biologicznych przekonuje Pierre-Alain Braillard w rozdziale pt. *Biologia systemów i edukacja* (s. 549–575). Biologia w ciągu ostatnich dwóch dekad w wielu aspektach doznała niezwykłych przeobrażeń. Dzięki *Projektowi Ludzkiego Genomu (w skrócie z ang. HGP)* i genomice otworzyły się nowe strategie badań i nowe możliwości, ale również powstała ogromna ilość danych, które muszą być interpretowane i analizowane w celu przekształcenia ich w wartościową wiedzę biologiczną. Był to jednak tylko pierwszy krok. Jeszcze przed zakończeniem *HGP* weszliśmy w fazę post-genomową, zwaną także genomiką funkcjonalną, która ma na celu opracowywanie nowych metod eksperymentalnych i analitycznych, zdolnych do wyjaśnienia funkcji regionów genomu. Te rodziny metod eksperymentalnych i analitycznych są powszechnie określane jako biologia systemów.

Gregorowi Mendlowi i jego „prawom" poświęcony został kolejny rozdział, zatytułowany *Mendel i jego pozycja w biologii* (s. 577–595), którego autorami są Annie Jamieson i Greg Radick. Autorzy wyjaśniają, że wiele z wprowadzonych przez G. Mendla opisów jest nie do końca precyzyjnych, ponieważ pomijają złożoność rozwoju i są niewystarczające do wyjaśnienia dziedziczenia wszelkiego rodzaju cech. A. Jamieson i G. Radick zaproponowali następujące rozwiązanie: nauczać, że interakcje geny-środowisko są wszechobecne i podstawowe, a następnie dopiero uczyć o G. Mendlu i jego grochu. W ten sposób, ich zdaniem, nacisk będzie kładziony na rozwój, a nie dziedziczność, ponieważ ta ostatnia nie ma sensu, jeśli nie jest brana pod uwagę złożoność rozwoju. Genetyki Mendla można, zdaniem autorów, dalej nauczać w szkołach i uniwersytetach, ale jako szczególny przypadek, a nie norma.

W rozdziale *Przeciwko „genowi dla": czy inkluzywna koncepcja materiału genetycznego skutecznie zastąpiła koncepcję genu?* (s. 597–628), Richard Burian i Kostas Kampourakis wskazują na rozbieżności w stosowaniu definicji genu. W związku z tym proponują, by pojęcie to zastąpić pojęciem materiału genetycznego. Materiał genetyczny jest dowolnym materiałem, który zawiera informacje wykorzystywane w tworzeniu innych materiałów z tej samej komórki lub organizmu o specyficznych funkcjach biologicznych. Większość genów eukariotycznych nie ma dobrze określonych granic. Powszechnie przyjmowane w środowisku biologów pojęcie „genów dla" wzmacnia koncepcję silnego determinizmu genetycznego, co jest głównym powodem krytyki tego pojęcia przez autorów omawianego rozdziału.

Autorem kolejnego rozdziału zatytułowanego *Obecne sposoby myślenia o naturze i wychowaniu* (s. 629–652) jest David Moore. Autor podkreśla, że zarówno elementy genetyczne, jak i nie-genetyczne są kluczowe dla procesów biologicznych. Uważa również, że czynniki środowiskowe mogą mieć czasowe, ale także długoterminowe skutki na aktywność genetyczną, zmieniając same geny. D. Moore omawia pojęcie plastyczności rozwojowej i podaje kilka jego przykładów. Konkluduje, sugerując, że zamiast uczyć genetyki Mendla z kwadratami Punnetta, które mogą być postrzegane jako wspierające determinizm genetyczny, nauczyciele mogliby przyjąć pedagogiczną zachętę do studium powstawania fenotypów w trakcie rozwoju.

Końcowe rozdziały omawianej książki poświęcone są etyce. W pierwszym z nich zatytułowanym *Genomika i społeczeństwo: dlaczego „odkrycia”* (s. 653–685), Lisa Gannett twierdzi, że kontekst społeczny, w którym przeprowadzane są badania w dziedzinie genomiki, wzbudził obawy co do obiektywizmu naukowców. Autorka wyjaśnia, że filozofowie nauki w przeszłości twierdzili, że nauka nie powinna mieć wpływu na wartości społeczne. Do tego, jak podkreśla, zostały wyznaczone niektóre rozróżnienia: między teorią a praktyką, między kontekstem odkrycia i kontekstem uzasadnienia, oraz między faktami i wartościami. L. Gannett przedstawia krytykę tych rozróżnień. Następnie zwraca się w stronę koncepcji przodka biogeograficznego, które zostało wprowadzone w zastępstwie „rasy” w genomice populacji. Koncepcja ta służy autorce jako studium przypadku, aby pokazać, że idea, zgodnie z którą, nauka jest wolna od wartości, nie została potwierdzona w przypadku badań w dziedzinie genomiki, które są prowadzone w skomercjalizowanym kontekście społecznym.

W kolejnym rozdziale, *Zagadnienia filozoficzne w badaniach nad ludzkimi pluripotencjalnymi komórkami macierzystymi* (s. 687–703), Andrzej Siegel koncentruje się na badaniach nad ludzkimi pluripotencjalnymi komórkami macierzystymi. Dotychczas, komórki, które zostały użyte w badaniach, stanowią ludzkie zarodkowe komórki macierzyste, zebranie których wymaga niszczenia zarodków. To spowodowało gwałtowny sprzeciw wielu środowisk wobec tego rodzaju badań. Badania te mają skutki dla metafizyki, etyki i filozofii polityki, w ramach których podnoszonych jest wiele pytań, takich jak, np., kiedy zaczyna się życie ludzkie, jeśli ludzkie zarodki mają status moralny, czy istnieje różnica między tworzeniem embrionów w celach badawczych a ich tworzeniem dla celów reprodukcyjnych itp.

Problemy etyczne związane z badaniami biomedycznymi stanowią temat kolejnego rozdziału, *Etyka w badaniach biomedycznych i praktyce* (s. 705–722), którego autorką jest Anya Plutynski. Autorka rozróżnia między kwestiami etycznymi, które są „wewnętrzne" względem badań biomedycznych, na przykład, pytania o to, jaki rodzaj badań jest etycznie dopuszczalny, a kwestiami „zewnętrznymi" względem badań, na przykład, jak badania biomedyczne są finansowane. A. Plutynski konkluduje, że rozwiązanie problemów etycznych jest ważne dla edukacji biologicznej, ponieważ badania biomedyczne muszą być omawiane w kontekście społecznym i etycznym.

Ostatni rozdział, *Etyka środowiskowa* (s. 723–743), autorstwa Roberta Millsteina wyjaśnia, że pytania o to, co jest wartościowe w naturalnym środowisku i jak powinniśmy się zachowywać w stosunku do niego, podnoszone przez biologię, ochronę środowiska i ekologię, są bardzo ważne i nie należy ich pomijać w edukacji biologii. Autor identyfikuje trzy główne obszary, w których etyka ochrony środowiska może mieć szczególne znaczenie dla edukacji biologicznej. Pierwszy wiąże się z pytaniem o to, co obejmuje naszą społeczność moralną: tylko ludzie, wszelkie formy żywe, czy całe ekosystemy? Drugi obszar obejmuje zastosowanie tych odpowiedzi do rzeczywistych zagadnień i problemów środowiskowych. Trzeci obszar, w którym etyka ochrony środowiska może pełnić ważną rolą, koncentruje się na centralnych pojęciach, takich jak bioróżnorodność, równowaga gatunków i ekosystemów.

Wszystkie rozdziały zawarte w omawianej książce są czytelne i zrozumiałe, przez co osoby bez wykształcenia w filozofii nauki mogą bez trudu i z pożytkiem z niej korzystać. Omawiany tom charakteryzuje się fachowością, ale również przydatnością praktyczną. W każdym rozdziale przedstawiono ważne implikacje dla edukacji biologicznej.

Książka przypomina antologię tematów z filozofii biologii. Wszystkie rozdziały rozwiązują problemy, które są kluczowe dla edukacji biologicznej, a często zaniedbywane. Na przykład teleologia i esencjalizm są rzadko omawiane w podręcznikach biologii. Podręczniki biologii rzadko odwołują się także do etyki i religii, a jeśli już, to zazwyczaj bez właściwego kontekstu filozoficznego, który jest niezbędny dla należytego zrozumienia.

Wszystkie tematy poszczególnych rozdziałów tej książki są mniej lub bardziej powiązane ze sobą. Uważny czytelnik zauważy ciąg informacji od ewolucji i rozwoju, do genetyki i etyki. Blisko połowa rozdziałów tego tomu rozwija teorię ewolucji, co nie jest zaskoczeniem, gdyż tematy dotyczące ewolucji często dominują w filozofii biologii.

Niezwykle cennym źródłem informacji, pozwalającym śledzić z pełnym zrozumieniem, niejednokrotnie wyłożone bardzo specjalistycznym językiem, informacje zawarte w poszczególnych rozdziałach książki, jest obszerny słowniczek (s. 745–762), wyjaśniający w bardzo przystępny sposób najważniejsze pojęcia przewijające się przez kolejne stronice tomu.

Recenzowana książka może zaciekawić wszystkich zainteresowanych problematyką biologiczną i filozoficzną. Może być niezwykle przydatna zwłaszcza dla nauczycieli biologii oraz studentów kierunków biologicznych. Filozoficzne zagadnienia poruszane w tej książce mogą być wykorzystane przez profesjonalnych biologów. Wielu z nich prowadzi wykłady dla studentów kierunków przyrodniczych, zwłaszcza biologicznych. Dzięki swoim nauczycielom studenci mogą dostrzec filozoficzne problemy, które wynikają z badań biologicznych. Niezwykle ważne, choć niestety często pomijane, znaczenie mają moralne, społeczne i religijne implikacje badań prowadzonych przez biologów. Recenzowany tom wszystkie te konteksty odsłania i należycie wyjaśnia. Omawiana pozycja może być też cennym źródłem informacji dla samych filozofów, gdyż pokazuje, jak filozofia biologii, wprowadzając do centralnych tematów biologicznych, może mieć niezwykle przydatny wkład do edukacji biologicznej. Zachęcam wszystkich zainteresowanych do lektury *The Philosophy of Biology. A Companion for Educators*.

Mirosław Twardowski