Zagadnienia Filozoficzne
w Nauce
LI (2012), 116–130

Daniel Chlastawa
Instytut Filozofii UW

CZY KONCEPTUALIZM JEST WYSTARCZAJĄCĄ PODSTAWĄ DLA ODRZUCENIA NIEKONSTRUKTYWNYCH DOWODÓW ISTNIENIA W MATEMATYCE?

Konstruktywizm matematyczny to stanowisko, zgodnie z którym obiekty badane przez matematykę (takie jak liczby, zbiory i funkcje) są tworami uprawiającego matematykę umysłu, nie zaś bytami preegzystującymi w jakiejś platońskiej rzeczywistości. Pogląd taki *prima facie* wydaje się nader intuicyjny i zdroworozsądkowy. Jego specyfika i kontrowersyjność ujawnia się dopiero wtedy, gdy stanowi on punkt wyjścia dla wyciągania określonych wniosków metodologicznych dotyczących prawomocności sposobów rozumowania stosowanych w praktyce matematycznej. Konstruktywiści kwestionują – między innymi — dopuszczalność tzw. niekonstruktywnych dowodów twierdzeń egzystencjalnych, czyli takich dowodów, w których (w najprostszym przypadku) wykazuje się twierdzenie postaci $\exists x P(x)$, ale nie podaje się żadnego konkretnego przykładu przedmiotu rodzaju P ani też metody pozwalającej na znalezienie żadnego takiego przykładu. Niekonstruktywnym dowodem istnienia jest na przykład następujące rozumowanie dowodzące istnienia liczb przestępnych.[1] Zbiór liczb rzeczywistych jest nie-

[1]Czyli liczb rzeczywistych nie będących pierwiastkami żadnego wielomianu o współczynnikach całkowitych (lub, równoważnie, wymiernych). Liczby rzeczywiste, dla których wielomian taki istnieje, nazywamy liczbami algebraicznymi.

przeliczalny, natomiast zbiór liczb algebraicznych jest przeliczalny, ponieważ przeliczalny jest zbiór wszystkich wielomianów o współczynnikach całkowitych. Zbiór liczb algebraicznych jest więc podzbiorem właściwym zbioru liczb rzeczywistych, wobec czego w tym ostatnim zbiorze muszą się znajdować jakieś liczby nie-algebraiczne, czyli przestępne. To dowodzi istnienia liczb przestępnych, jednak bez podawania żadnych przykładów takich liczb.[2] Konstruktywiści odrzucają dowody tego rodzaju, powołując się na swoją konceptualistyczną ontologię: przedmioty matematyczne są wytworami umysłu, nie można więc zasadnie mówić o ich istnieniu dopóty, dopóki nie zostaną one skonstruowane, czyli *explicite* wskazane. A skoro w dowodach niekonstruktywnych nie dokonuje się konstrukcji przedmiotów matematycznych, to dowodów takich nie można uznać za poprawne dowody istnienia tych przedmiotów. Celem niniejszego artykułu będzie uzasadnienie tezy, że argument ten, choć typowy,[3] jest błędny, ponieważ opiera się na nieporozumieniu dotyczącym pojęcia istnienia. Pokażę również sposób, w jaki można zmodyfikować konstruktywizm, by dowody niekonstruktywne móc jednak odrzucić, oraz powód, dla którego modyfikacja ta, wiążąca się z przyjęciem niezwykle paradoksalnego stanowiska, nie jest czymś, na co warto się decydować.

1. DWA POJĘCIA ISTNIENIA

Gdy mówimy o istnieniu przedmiotów matematycznych (powiedzmy, liczb naturalnych), to możemy mieć na myśli dwie zupełnie odmienne rzeczy. Po pierwsze, możemy mieć na myśli „ontologiczne" pojęcie istnienia — istnienie liczb naturalnych *jako takich*, polegające na tym, że uzyskały one istnienie dzięki aktywności umysłu, że zostały skonstruowane przez umysł *jako* liczby naturalne.[4] Po drugie,

[2]Skądinąd przykłady takie są znane – liczbami przestępnymi są między innymi π i e.

[3]Jest on tak bardzo obiegowy, że w pismach konstruktywistów trudno go znaleźć sformułowanego *explicite*, nie jest też jasne, kto jako pierwszy się nim posłużył – być może był to Leopold Kronecker.

[4]Tak to wygląda przy założeniach konceptualistycznych, ale ontologiczne pojęcie istnienia jest ogólne i niezależne od szczegółowych koncepcji tego, jak istnieją dane

możemy mieć na myśli „rodzajowe” pojęcie istnienia – istnienie liczb naturalnych *pewnego szczególnego rodzaju*, polegające na tym, że niektóre z owych skonstruowanych przez umysł liczb podpadają pod ten rodzaj. Twierdzenia egzystencjalne w matematyce to twierdzenia mówiące o istnieniu przedmiotów pewnego rodzaju, a więc twierdzenia, w których operuje się rodzajowym pojęciem istnienia. Jednakże aby mówić o dowodzeniu istnienia przedmiotów pewnego rodzaju, trzeba już założyć, że przedmioty te w ogóle istnieją, tzn. że istnieją jako takie, a nie jako egzemplarze pewnych ogólnych rodzajów. Aby w ogóle pracować w ramach jakiejś teorii matematycznej (a jedną z form takiej pracy jest poszukiwanie dowodów istnienia przedmiotów pewnego rodzaju), trzeba na wstępie określić uniwersum obiektów tej teorii, tzn. określić, co jest przedmiotem naszych rozważań w ramach tej teorii. Przykładowo, gdy pracujemy w teorii liczb naturalnych, to już na wstępie musimy skonstruować cały zbiór liczb naturalnych N, biorąc za punkt wyjścia liczę zero i przyjmując regułę następnika jako regułę generującą wszystkie pozostałe elementy tego zbioru. Jeśli następnie podajemy niekonstruktywny dowód istnienia liczb naturalnych pewnego rodzaju P i ktoś zgłosi zastrzeżenie, że dowód ten jest konstruktywistycznie błędny, bo liczby te trzeba dopiero skonstruować, to odpowiedź powinna być następująca: liczby te (wszystkie!) już zostały *skonstruowane* na samym początku wraz ze zbiorem N.[5] Domaganie się konstruowania przykładów dla twierdzenia o istnieniu P-ów („bo liczby to twory umysłu”) to w istocie domaganie się, by liczby naturalne konstruować na nowo, jeszcze raz, by otwierać drzwi, które już zostały otwarte. Liczby te już zostały skonstruowane, a to, że nie jesteśmy (przynajmniej tymczasowo) w stanie podać przykładów dla twierdzenia o istnieniu jakichś P-ów, nie ma żadnego związku z ich statusem ontologicznym. Można się zgodzić, że liczby to twór umysłu, a nawet zgodzić się, że jest to twór, który znika, gdy przestajemy myśleć o ma-

przedmioty. Przy założeniach realistycznych mówiąc o istnieniu liczb naturalnych jako takich mielibyśmy na myśli ich istnienie jako pewnych pozaczasowych i idealnych bytów.

[5]Teza taka mogłaby z pewnych względów spotkać się z protestem ze strony konstruktywistów. Do argumentacji na rzecz słuszności tej tezy przejdę w kolejnej sekcji artykułu.

tematyce i idziemy pod prysznic. Nie ma to jednak żadnego związku z zagadnieniem poprawności dowodów niekonstruktywnych, ponieważ te twory umysłu już zostały przez nas ukonstytuowane na samym początku. Gdy w teorii przedmiotów matematycznych z dziedziny D dowodzimy istnienia przedmiotów podpadających pod rodzaj P, to przecież nie wprowadzamy do tej teorii jakichkolwiek *nowych* przedmiotów, lecz wskazujemy na to, że pojęcie P posiada wśród tych „starych" przedmiotów pewne egzemplifikacje. Egzemplifikacje te są konkretnymi, „starymi" przedmiotami, a jeśli nawet nie potrafimy wskazać, które to są przedmioty, to przecież jest to jedynie ograniczenie epistemologiczne, nie zaś fakt o znaczeniu metafizycznym.

Dla większej sugestywności rozważmy następujący eksperyment myślowy. Załóżmy, że udowodniliśmy niekonstruktywnie twierdzenie $\exists x A(x)$, a następnie – zgodnie z tradycyjnym konstruktywistycznym wymogiem – znaleźliśmy przykład dla tego twierdzenia w postaci, dajmy na to, liczby 137, dowodząc twierdzenia $A(137)$. Załóżmy następnie, że udowodniliśmy niekonstruktywnie twierdzenie $\exists x B(x)$, ku niezadowoleniu konstruktywisty: „nie możesz głosić istnienia żadnego przedmiotu, dopóki go nie skonstruujesz". Po jakimś czasie stwierdziliśmy jednak, że przykładem dla tego twierdzenia również jest liczba 137, dowodząc twierdzenia $B(137)$. Pytanie brzmi: czy konstruktywista miał powód do niezadowolenia? Nie: przedmiot — mianowicie liczba 137 – już został skonstruowany[6] poprzez dowód twierdzenia $A(137)$ i nie ma potrzeby, by konstruować go po raz kolejny. Niedorzeczny byłby wymóg, by *osobno* konstruować przedmiot x istniejący *jako* przedmiot typu P_1 i ten sam przedmiot x istniejący *jako* przedmiot typu P_2, skoro jest to jeden i ten sam przedmiot. W czasie dzielącym niekonstruktywne udowodnienie twierdzenia $\exists x B(x)$ od udowodnienia twierdzenia $B(137)$ przedmiot – liczba 137 – był skonstruowany, ale

[6]W niniejszym artykule argumentuję na rzecz ogólnej tezy, że z konstruowaniem przedmiotów matematycznych mamy do czynienia w momencie określania dziedziny danej teorii matematycznej, nie zaś w momencie dowodzenia twierdzenia, że dany przedmiot posiada daną własność. Powyższy argument polega natomiast na wskazaniu, że konstruktywistyczny wymóg podania świadków dla twierdzeń egzystencjalnych jest nieuzasadniony nawet wtedy, gdy „konstruowanie przedmiotu" rozumie się w ten drugi sposób.

jeszcze nie wiedzieliśmy, że posiada on *również* cechę B. Konstruktywista bezpodstawnie oponował przeciwko dowodowi niekonstruktywnemu powołując się na konceptualizm, a skoro jest tak w przynajmniej jednym, opisanym tu przypadku, to pokazuje to przynajmniej tyle, że konceptualizm nie stanowi uniwersalnej i dostatecznej podstawy dla opozycji wobec dowodów niekonstruktywnych.

Dla uniknięcia nieporozumień chciałbym podkreślić, że mówiąc o ontologicznie (a nie rodzajowo) rozumianym istnieniu przedmiotów matematycznych nie mam na myśli tego, że pewne przedmioty matematyczne, np. liczba 137, posiadają *cechę* istnienia. Traktowanie istnienia jako cechy (a w każdym razie cechy nietrywialnej, czyli takiej, że nie wszystkie przedmioty ją posiadają) jest dość powszechnie uznawane za niewłaściwe, moim zdaniem słusznie – w przeciwnym bowiem razie za cechę musielibyśmy uznać także *nieistnienie*, a to uwikłałoby nas we wszystkie problemy niebytu, jakie trapiły już Platona w *Teajtecie* i jakie towarzyszą koncepcjom tzw. przedmiotów nieistniejących, na przykład teorii Meinonga i pokrewnym. Dla konstruktywisty konstrukcja liczby 137 nie polega na tym, że liczbie tej nadaje się cechę istnienia, gdyż inaczej należałoby uznać, że liczba 137 już była czymś przed dokonaniem konstrukcji, mianowicie pewnym przedmiotem nieistniejącym, a z konstruktywistycznego punktu widzenia pogląd taki wygląda w istocie na platonizm w owczej skórze. Ale odłóżmy na bok spory wokół meinongowskich koncepcji matematyki. Gdy mowa o ontologicznie rozumianym (nie)istnieniu liczby 137, czyli (nie)istnieniu liczby 137 jako takiej, to chodzi po prostu o to, że (nie) istnieje przedmiot, który posiada wszystkie cechy liczby 137, czyli, inaczej mówiąc, (nie) istnieje przedmiot, który stanowi egzemplifikację *indywidualnego pojęcia* liczby 137. Indywidualne pojęcie można rozumieć jako taki zbiór cech, który z konieczności ma co najwyżej jedną egzemplifikację.[7] Przykładowo, do indywidualnego pojęcia liczby 137 wchodzą takie cechy, jak dodatniość, wymierność, całkowitość, bycie większą od

[7] „Pojęcie indywidualne” to coś słabszego od „pojęcia zupełnego”, czyli takiego pojęcia, które zawiera każdą cechę albo jej negację, tzn. jest maksymalnym niesprzecznym zbiorem cech. Każde pojęcie zupełne jest też pojęciem indywidualnym, ale nie na odwrót.

100, posiadanie w swoim zapisie cyfr o sumie 11, bycie jedynym dodatnim pierwiastkiem wielomianu $x^2 - 18769$ itd.[8] Mówiąc o tym, że istnieje liczba 137, mam na myśli to, że w świecie (najszerzej rozumianym, obejmującym również wnętrza umysłów) istnieje taki byt, który posiada – między innymi – wszystkie cechy wymienione powyżej. Jeśli zwrócimy uwagę na fakt, że zdania stwierdzające istnienie rozumiane rodzajowo wyrażają istnienie egzemplifikacji pewnych pojęć (czyli dowolnych zbiorów cech), to dostrzeżemy, że *wszelkie* zdania stwierdzające istnienie posiadają jednolitą formę logiczną – wyrażają posiadanie egzemplifikacji przez pewne pojęcia. Pojęcie istnienia jako takie nie jest więc dwuznaczne, jest jednoznaczne, może natomiast funkcjonować w inny sposób w zależności od kontekstu pragmatycznego, czyli tego, czy do problemu istnienia podchodzimy od strony naukowej, czy filozoficznej. Gdy w ramach pewnej teorii matematycznej (np. teorii liczb naturalnych) pytamy o istnienie przedmiotów pewnego szczególnego rodzaju (np. liczb doskonałych[9]), to mamy do czynienia z realnym, merytorycznym problemem naukowym, nie zaś zagadnieniem filozoficznym. Jeśli z kolei w ramach teorii liczb naturalnych pytamy o to, czy istnieją liczby naturalne, to nie mamy do czynienia z problemem merytorycznym, gdyż byłby on trywialny: tak, liczby naturalne istnieją, bo ich istnienie z góry zakładamy. Pytanie o ich istnienie może być nietrywialne tylko wtedy, gdy rozumiemy je filozoficzne, tzn. gdy zastanawiamy się, czy liczby naturalne istnieją jako byty w świecie (choćby miał to być „świat” czyjegoś umysłu), a nie czysto formalne elementy pewnej teorii naukowej. Zarówno w pytaniach merytorycznych, jak i filozoficznych istnienie rozumiemy tak samo – jako posiadanie egzemplifikacji przez pewne pojęcia. Różnica tych pytań polega na tym, że przedmioty egzemplifikujące te pojęcia traktujemy raz jako formalne konstrukty, a raz jako realne byty. Rodzajowe pojęcie istnienia wiąże się z merytorycznymi problemami matematycznymi, zaś pojęcie

[8]Zauważmy, że jednoelementowy zbiór zawierający tę ostatnią cechę jest już indywidualnym pojęciem liczby 137. Z cechy tej wynikają wszystkie inne cechy liczby 137.

[9]Tzn. liczb będących sumą wszystkich swoich dzielników właściwych, czyli mniejszych od tej liczby.

ontologiczne dotyczy filozoficznego pytania o sam status ontologiczny bytów nauki, jaką jest matematyka.

2. KONSTRUOWANIE DZIEDZINY OBIEKTÓW

Być może konstruktywista mógłby odpowiedzieć, że teza, iż na wstępie musimy skonstruować całe uniwersum danej teorii matematycznej jest tezą z góry przemycającą realizm, i można ją odrzucić na rzecz słabszego i bardziej wiarygodnego poglądu, że uniwersum to ulega stopniowej konstrukcji w ramach pracy nad teorią, że rozrasta się w czasie. Jednakże w takiej sytuacji w ogóle nie wiedzielibyśmy, o czym w teorii jest mowa, nie wiedzielibyśmy, jakie obiekty są w teorii dopuszczalne, a jakie nie są. Co na przykład zabroniłoby nam, by uniwersum teorii liczb naturalnych powiększyć o jakieś (nie będące liczbami naturalnymi) liczby wymierne czy rzeczywiste? Muszą istnieć jakieś wstępne ograniczenia na kierunki, w jakich uniwersum faktycznie pomyślanych bytów matematycznych miałoby się rozrastać, ale ograniczenia te nie są niczym innym, niż właśnie określeniem na samym początku ogółu wszystkich obiektów rozważanych w teorii. W każdej dostatecznie dobrze określonej działalności matematycznej z góry wiemy, o jakich rzeczach mówimy, to jednak wymaga odgórnego określenia, jakie to są rzeczy. Bez tego bylibyśmy pogrążeni we mgle. Co więcej, gdy konstruujemy przedmioty pewnej teorii, to tym samym konstruujemy przedmioty spełniające (lub niespełniające) *wszystkie* warunki, jakie tylko można sensownie w tej teorii sformułować. Gdy dowodzimy niekonstruktywnie, że istnieją egzemplifikacje jakiegoś rodzaju P, to nie konstruujemy tych egzemplifikacji – one już zostały skonstruowane na początku, tyle że *niejawnie*, nie wiedzieliśmy bowiem, że ten czy inny przedmiot jest taką egzemplifikacją. Teraz *dowiadujemy się* tylko, że wśród tych przedmiotów takie egzemplifikacje faktycznie się znajdują. Dowód posiadania pewnej własności przez pewien już skonstruowany przedmiot to nie jego ponowna konstrukcja ani konstrukcja „uzupełniająca”, lecz ujawnienie czegoś, co przedmiot ten już posiadał w momencie konstrukcji.[10] Formalne dowodzenie istnienia przedmiotów matematycznych określonego rodzaju to nie „natykanie się” na byty istniejące w świecie, lecz wyciąganie logicznych wniosków z tego, co się zakłada. Dowodzenie formalne to rutynowa procedura, jaką się wykonuje na etapie „nauki normalnej”, czyli w takiej sytuacji, gdy dana dziedzina matematyczna jest wyraźnie określona. Istnieje bowiem sens, w którym można powiedzieć, że matematycy w swojej pracy natykają się na jakieś „byty w świecie”, np. pitagorejczycy odkrywający – ku swemu zdumieniu, a nawet zgorszeniu – istnienie liczb niewymiernych. Takie przypadki mają jednak zupełnie inny status metodologiczny: są to sytuacje, w których dochodzi do konstrukcji zupełnie nowej dziedziny przedmiotowej (w przypadku pitagorejczyków – dziedziny liczb rzeczywistych), wykraczającej poza dziedzinę dotychczasową (dziedzinę liczb wymiernych). Następuje rozsadzenie starych, niewystarczających ram pojęciowych przez nowe potrzeby płynące ze źródeł pozaformalnych, jakimi są praktyka i intuicje. Wówczas nie ma jednak mowy o *dowodzeniu* istnienia tych nowych przedmiotów, ponieważ ich istnienie jest przedmiotem pewnego postulatu.

Można by jednak zarzucić, że konstruowanie obiektów z ich wszystkimi cechami w ramach konstrukcji jakiejś dziedziny matematycznej wydaje się niemożliwe, skoro cech tych jest nieskończenie wiele. Co więcej, niektóre z tych cech dopiero odkrywamy, nieraz z zaskoczeniem, co byłoby niemożliwe, gdybyśmy wszystkie te cechy już na samym początku do nich włożyli. Ale nie jest prawdą, że konstrukcja przedmiotów wiąże się z „nadaniem” przez nas tym przedmiotom wszystkich ich cech, jeśli przez „nadanie” rozumieć pewien świadomy akt. Przykładowo, konstrukcja liczb naturalnych polega na tym, że przypisujemy liczbom jedynie cechę bycia którymś z kolei następnikiem liczby zero oraz te cechy, które figurują w aksjomatach Peano.

[10] Oczywiście konstrukcją nie jest samo wyliczenie przedmiotów, lecz wyliczenie połączone z podaniem (choćby *implicite*) warunków spełnianych przez te przedmioty. Konstrukcja liczb naturalnych to nie po prostu konstrukcja zbioru niezinterpretowanych symboli, lecz zbioru symboli, którymi rządzą pewne prawa, choćby niesformułowane *explicite* i funkcjonujące czysto intuicyjnie. To nie ma jednak wpływu na moje rozważania, gdyż wszystko to dokonuje się przed wszelkimi operacjami dowodzenia własności tych konstrukcji.

Mamy tu do czynienia z dwuznacznością „przypisywania”: przypisywaniem *explicite* i przypisywaniem *implicite*. Dokonując konstrukcji pewnych obiektów przypisujemy im *explicite* jedynie niewiele cech, ale zarazem *implicite* przypisujemy im nieskończenie wiele cech, mianowicie wszystkie te, które wynikają z aksjomatów, jakie założyliśmy w odniesieniu do tych przedmiotów. Gdybyśmy nie przypisali im *implicite* wszystkich ich cech, to nie byłoby prawdą, że *odkryliśmy* pewne cechy tych przedmiotów – cechy te nie mogły się wziąć znikąd, a więc gdyby nie istniały one w przedmiotach od samego początku, to nie mielibyśmy do czynienia z odkryciem, lecz z fantazjowaniem (do napięcia między odkrywaniem a fantazjowaniem jeszcze wrócę). Odkrycie nie polega na „wytworzeniu” nowych cech przedmiotów, lecz na uświadomieniu sobie (popartym, rzecz jasna, stosownym uzasadnieniem), że cechy te od początku istniały w tych przedmiotach na mocy aksjomatów.

Należy powiedzieć jasno: konceptualistyczna ontologia, leżąca u podstaw konstruktywizmu, jest niewystarczającym powodem do odrzucenia poprawności tzw. niekonstruktywnych dowodów istnienia. Warto zauważyć, że z konceptualistycznie motywowanej krytyki dowodów niekonstruktywnych wyrosła logika intuicjonistyczna, więc skoro krytyka ta jest bezpodstawna, to całą logikę intuicjonistyczną można by postawić pod znakiem zapytania. Byłby to jednak zbyt daleko idący wniosek, ponieważ logika intuicjonistyczna posiada obecnie wystarczającą legitymizację, niezależną od konstruktywistycznej ontologii matematyki, np. w postaci zastosowań informatycznych tej logiki. Na miejscu pozostaje jedynie uwaga o znaczeniu historycznym, że logika intuicjonistyczna może być kolejnym, obok logiki modalnej i trójwartościowej,[11] przykładem logiki „poczętej w grzechu”, czyli takiej, która zrodziła się wskutek pewnego błędu, ale jej dalsze losy sprawiły, że uzyskała samodzielną wartość. Można być konstruktywistą – nawet radykalnym[12] – i zarazem akceptować dowody niekonstruktywne. Kon-

[11] O tym, dlaczego logikę trójwartościową Łukasiewicza należy uznać za „poczętą w grzechu”, piszę w pracy Chlastawa 2011.

[12] Czyli takim, który sądzi, że obiekty matematyczne istnieją *tylko* wtedy, gdy ktoś aktualnie powołuje je do życia aktem swojego świadomego myślenia.

struktywizm będzie się wówczas wyrażał w tezie, że przedmioty matematyczne nie istnieją, dopóki nie poda się konstrukcji ustanawiającej całą dziedzinę teorii matematycznej dotyczącej tych przedmiotów.

3. AKTUALIZM JAKO „OSTATNIA DESKA RATUNKU" PRZED DOWODAMI NIEKONSTRUKTYWNYMI

Czy oznacza to, że konstruktywista jest zmuszony do powściągnięcia swojej niechęci wobec dowodów niekonstruktywnych? Niekoniecznie. Można uczynić zadość intuicjom podpowiadającym wtórność matematyki względem ludzkiej myśli, przyjmując tezę bardziej radykalną od tezy konstruktywizmu *ontologicznego*, głoszącego pochodność obiektów matematycznych względem umysłu. Tezą tą jest konstruktywizm *semantyczny*, dotyczący już nie obiektów matematycznych, lecz prawdy matematycznej. W myśl tego stanowiska, prawdziwość zdań matematycznych jest zależna od tego, czy prawdziwość tę *faktycznie* rozpoznajemy, a przynajmniej od tego, czy jesteśmy *zasadniczo zdolni* do jej rozpoznania. Stanowisko to przyjmuje więc dwie wersje – mocniejszą i słabszą. Ich różnicy świadomi są autorzy zajmujący się konstruktywizmem. Jak pisze niedawno zmarły brytyjski filozof Michael Dummett,

> „nasze zdania są prawdziwe tylko wtedy, gdy stwierdziliśmy, że są takie, to znaczy – w odniesieniu do zdań matematycznych – gdy je udowodniliśmy, lub przynajmniej gdy dysponujemy efektywną metodą uzyskiwania ich dowodu" (Dummett 1977, s. 375).

Analogiczną uwagę formułuje Crispin Wright:

> „Dla intuicjonisty prawdziwość zdania matematycznego może polegać jedynie na tym, że istnieje dla niego dowód lub, w bardziej radykalnej wersji, na tym, że rzeczywiście dysponujemy jego dowodem" (Wright 1995, s. 304).

Wśród przedstawicieli konstruktywizmu można znaleźć takich, którzy wydają się skłaniać ku konstruktywizmowi semantycznemu w wersji mocnej (który można nazwać aktualizmem, głosi on bowiem, że prawdą jest to, co aktualnie dowiedzione). Przykładowo, Arend Heyting na pytanie „czy pewna liczba posiada pewną własność, zanim zostanie to wykazane?” odpowiada następująco: każde zdanie matematyczne zdaje sprawę z faktu, że *dokonano* pewnej konstrukcji myślowej, więc dopóki konstrukcja taka nie zostanie wykonana, dopóty nie można powiedzieć, by coś o tej liczbie było udowodnione. Odpowiedź taka jest oczywiście niesatysfakcjonująca z realistycznego punktu widzenia, ale Heyting mówi, że aby w pełni wyjaśnić sens postawionego pytania należałoby odwołać się do metafizycznego świata bytów matematycznych istniejących niezależnie od naszej wiedzy (Heyting 1956, s. 3), a na to nie ma zgody, gdyż Heyting domaga się uprawiania matematyki „czystej”, całkowicie uwolnionej od metafizyki. Dummett początkowo odrzucał aktualizm, uważając zrównanie prawdziwości z faktycznym dowiedzeniem za pogląd skrajny, którego wcale nie trzeba akceptować, aby dochować wierności innym zasadom intuicjonistycznym. Za zaletę odrzucenia aktualizmu uważał również to, że pozwala ono oddać sprawiedliwość powszechnej intuicji, że zdania matematyczne są prawdami wiecznymi (Dummett 1977, s. 18-19). Później Dummett zajął jednak stanowisko aktualistyczne, uznając, że prawda matematyczna jest – posłużmy się tu terminologią Jana Łukasiewicza – wieczna, ale nie odwieczna. Prawda matematyczna jest niezmienna, ale tylko w tym sensie, że jeśli udowodniono pewne twierdzenie, to jego prawdziwość nie może już ulec zmianie. Jednakże, jak pisze Dummett,

> „nie wynika z tego to, że takie twierdzenie posiada tę wartość logiczną od zawsze, ani też to, że rozpoznanie przez nas wartości logicznej owego twierdzenia nie ma żadnego wpływu na posiadanie przez niego tej wartości” (Dummett 1998, s. 16).

Choć przyznaje, że poznanie matematyczne nie jest arbitralne i odnosi się do jakiejś matematycznej rzeczywistości, to dodaje zarazem:

> „nie powinno się na tej podstawie sądzić, że rzeczywistość ta odwiecznie posiadała te cechy zanim je sobie uświadomiliśmy. Powinniśmy je raczej pojmować jako cechy,

> które zaistniały wraz z ich odkryciem; przed tym odkryciem rzeczywistość matematyczna była pod tym względem po prostu nieokreślona” (ibidem, s. 16).

Czy różnica tych dwóch wersji konstruktywizmu semantycznego ma jakieś implikacje dla zagadnienia dowodów niekonstruktywnych? Konstruktywizm semantyczny w słabszej wersji nie wydaje się radykalizować konstruktywizmu ontologicznego w istotny sposób. Konstruktywista ontologiczny jest bowiem także konstruktywistą semantycznym w tym oczywistym sensie, że odmawia zdaniom o obiektach matematycznych posiadania wartości logicznej, dopóki obiekty te nie zostaną przez umysł skonstruowane. Może jednak przyjmować, że wraz z wyczerpującym skonstruowaniem obiektów matematycznych wszystkie zdania dotyczące tych obiektów są obiektywnie prawdziwe lub obiektywnie fałszywe, niezależnie od tego, czy znamy obiektywne wartości logiczne tych zdań i czy w danej chwili jesteśmy w dostatecznie dogodnym położeniu, by te wartości móc uchwycić.[13] A skoro tak, to słaby konstruktywizm semantyczny również jest do pogodzenia z akceptacją dowodów niekonstruktywnych. Jak wygląda sprawa aktualizmu? Na pierwszy rzut oka mogłoby się wydawać, że on również niczego nie zmienia w rozważanej sprawie: można by przyjąć, że w chwili, gdy przedstawiamy niekonstruktywny dowód twierdzenia egzystencjalnego, twierdzenie to uzyskuje – właśnie dzięki podaniu tego dowodu – prawdziwość, a więc aktualizm to za mało, by odrzucić dowody niekonstruktywne. Zwróćmy jednak uwagę na fakt, że przedstawiając dowód niekonstruktywny dla zdania postaci $\exists x \in D\ P(x)$ nie przedstawiamy dowodu żadnego zdania postaci $P(a)$, gdzie $a \in D$, wobec czego, w myśl aktualizmu, *żadne* takie zdanie nie jest prawdziwe (w aktualistycznym sensie słowa „prawda”), a skoro tak, to nie będzie również (aktualistycznie) prawdziwe zdanie $\exists x \in D\ P(x)$. Inaczej mówiąc, z aktualistycznego punktu widzenia konkretne przedmioty nie posiadają pewnych cech, dopóki o tych konkretnych przedmiotach nie stwierdzimy, że te cechy posiadają. Skoro więc o żadnym konkretnym przedmiocie nie stwierdzamy takiego posiadania, to nie jesteśmy

[13]Byłoby to coś w rodzaju Putnamowskiego „realizmu wewnętrznego” w matematyce.

uprawnieni do twierdzenia, że jakiekolwiek w ogóle przedmioty posiadają tę cechę. To pokazuje, że na gruncie aktualizmu niekonstruktywne dowody istnienia mogą być zasadnie uznane za nieprawomocne. Wynik ten wydaje się być korzystny dla konstruktywistów, pokazuje bowiem, że ich sztandarowy postulat nieakceptowania dowodów niekonstruktywnych może znaleźć dostateczną filozoficzną podstawę. Aktualizm jest jednakże stanowiskiem niezwykle radykalnym i trudnym do utrzymania. Podstawowy problem polega na tym, że na gruncie aktualizmu nie sposób wyjaśnić, czemu matematyka w tak uderzający sposób różni się od fantastyki: jak to możliwe, że nieokreślona rzeczywistość matematyczna mogła zostać określona np. co do przestępności liczby π tylko na *jeden* sposób – mianowicie taki, że liczba π naprawdę jest przestępna? Gdyby rzeczywistość ta była naprawdę nieokreślona przed podaniem dowodu, to cóż stałoby na przeszkodzie, by z równym powodzeniem dało się tę rzeczywistość określić w taki sposób, że liczba π *nie jest* przestępna? Skoro zaś ta możliwość jest wykluczona, to coś musiało bardzo silnie stać jej na przeszkodzie, a czym innym mogła być ta przeszkoda niż faktem, iż rzeczywistość matematyczna (jakkolwiek rozumiana) była jednak określona co do przestępności liczby π zanim faktycznie podano dowód, że π jest przestępna?[14]

PODSUMOWANIE

Z powyższych rozważań wyłaniają się następujące wnioski. Konceptualizm, będący ontologiczno-epistemologiczną podstawą konstruktywizmu to za mało, by uzasadnić odrzucenie niekonstruktywnych dowodów twierdzeń egzystencjalnych w matematyce. Konstruktywista opierający swoje poglądy na prostodusznym konceptualizmie musi więc stanąć przed następującym dylematem: albo zgodzi się na dopuszczenie dowodów niekonstruktywnych, albo wzmocni swój konstruktywizm do postaci aktualistycznej. Każda z tych możliwości wydaje się trudna do przyjęcia. Pogodzenie się z dowodami niekonstruktywnymi oznaczałoby odejście od najbardziej chyba charakterystycznego postu-

[14] Ten argument przeciwko aktualizmowi szerzej rozwinąłem w pracy Chlastawa 2010.

latu metodologicznego konstruktywizmu, z jakim zwolennicy tego stanowiska występowali co najmniej od drugiej połowy XIX wieku. Przyjęcie aktualizmu wiązałoby się z kolei z popadnięciem w bardzo poważne trudności z wytłumaczeniem *jakiejkolwiek* w ogóle obiektywności w matematyce, nie mówiąc już o wytłumaczeniu, dlaczego matematyka jest powszechnie uważana za naukę, która swoją obiektywnością przekracza wszystkie inne dziedziny ludzkich dociekań.

LITERATURA

Chlastawa, D. (2010), *Trzy argumenty przeciwko konstruktywizmowi matematycznemu*, „Filozofia Nauki” nr 4(72), s. 77-95.

Chlastawa, D. (2011), *Indeterminizm Jana Łukasiewicza i jego słabości*, „Edukacja Filozoficzna” vol. 51, s. 43-54.

Dummett, M. (1977), *Elements of Intuitionism*, Oxford, Clarendon Press.

Dummett, M. (1998), *Is the Concept of Truth Needed for Semantics?*, w: Martìnez, C., Rivas, U., Villegas-Forero, L. (red.), *Truth in Perspective: Recent Issues in Logic, Representation and Ontology*, Aldershot, Ashgate, 3-22.

Heyting, A. (1956), *Intuitionism. An Introduction*, Amsterdam, North-Holland Publishing Company.

Wright, C. (1995), *Realizm, znaczenie i prawda* (fragm.), przeł. T. Szubka, w: Szubka T. (red.), *Metafizyka w filozofii analitycznej*, Lublin, Towarzystwo Naukowe KUL, 295-325.

SUMMARY

IS CONCEPTUALISM A SUFFICIENT REASON FOR THE REJECTION OF NON-CONSTRUCTIVE EXISTENCE PROOFS IN MATHEMATICS?

Non-constructive existence proofs (which prove the existence of mathematical objects of a certain kind without giving any particular examples of such objects) are rejected by constructivists, who hold a conceptualist view that mathematical objects exist only if they are constructed. In the paper it

is argued that this conceptualist argument against non-constructive proofs is fallacious, because those proofs establish the existence of objects belonging to certain kinds rather than the existence of those objects per se. Moreover, to engage in proving existence theorems in a given mathematical theory one has to define all of the objects of this theory at the very beginning, which can be interpreted as establishing the existence of these objects before any theorem about them is proven. It is also argued that the constructivist may escape these objections by adopting the actualistic view, according to which a mathematical sentence is true if and only if it is established as true, but this view is very implausible, as it seems unable to explain the strictness and objectiveness of mathematics and the fact that it differs so fundamentally from, for example, fictional discourse.