Aksjomat wyboru w pracach Wacława Sierpińskiego

Katarzyna Lewandowska
Uniwersytet Papieski Jana Pawła II, Wydział Filozoficzny

The axiom of choice in the papers of Wacław Sierpiński

Abstract

This paper presents Wacław Sierpiński – the first advocate of the axiom of choice. We focus on the philosophical and mathematical topics related to the axiom of choice which were considered by Sierpiński. We analyze some of his papers to show how his results effected the debate over Zermelo's axiom. Sierpiński's impact on this discussion is of particular importance since he was the first who tried to explore consequences of the axiom of choice thoroughly and asserted its undoubted significance to mathematics as a whole.

Keywords:

axiom of choice, philosophy of mathematics, set theory, cardinality, mathematical analysis

Pierwszy „adwokat” aksjomatu wyboru

W 1904 roku Ernst Zermelo, dowodząc twierdzenia o dobrym uporządkowaniu, sformułował pewnik wyboru[1]. Nie ulega wątpliwości, że jest to jeden z najgoręcej dyskutowanych aksjomatów w całej historii matematyki. Rozważany zarówno przez filozofów, jak i matematyków, stał się centralnym zagadnieniem filozofii matematyki XX wieku. Sama tylko debata nad ważnością dowodu Zermela trwała do 1908 roku i rozgrywała się na arenie takich krajów, jak Anglia, Niemcy, Francja, Holandia, Węgry i Stany Zjednoczone. W 1908 roku autor aksjomatu wyboru, chcąc zamknąć dyskusję nad swoim postulatem, jako pierwszy zaksjomatyzował teorię mnogości, umieszczając pośród siedmiu aksjomatów pewnik wyboru. Zabieg Zermela nie przyniósł jednakże oczekiwanych rezultatów i nie tylko nie obronił AC, lecz sprowokował krytykę całej aksjomatyki, szczególnie zaś, obok aksjomatu wyboru, także aksjomatu oddzielania.

Rozpoczął się wtedy kolejny okres debaty wokół pewnika wyboru (do 1918 roku), jednakże dyskusja ta miała odmienny charakter. Zwrócono bowiem uwagę na możliwość zastosowania aksjomatu Zermela w różnych dziedzinach matematy-

[1] Niech $\mathcal{J}\neq\emptyset$ oraz $\{Xj\}_{j\in\mathcal{J}}$ będzie rodziną zbiorów niepustych, wówczas istnieje odwzorowanie $\tau\colon \mathcal{J} \to \bigcup_{j\in\mathcal{J}} Xj$ takie, że $\tau(j) \in Xj$ dla każdego $j \in \mathcal{J}$. W niniejszej pracy używamy zamiennie określeń: *aksjomat wyboru*, *postulat wyboru*, *pewnik wyboru*, *pewnik Zermela*, *aksjomat Zermela* oraz skrótu AC.

ki[2]. Pomimo stopniowego odkrywania niezaprzeczalnej i ważkiej roli AC w całej matematyce, jeszcze w 1918 roku spora część matematyków odnosiła się raczej sceptycznie do pewnika wyboru. W swojej monografii Gregory H. Moore podaje kilka przyczyn takiego stanu rzeczy[3]. Jedną z nich był według niego brak adwokata dla aksjomatu wyboru: kogoś, kto podjąłby się rzetelnego i systematycznego badania przede wszystkim konsekwencji przyjęcia aksjomatu wyboru oraz podkreślania istotnej roli AC w matematyce. Oczywiście, pierwszym obrońcą był Zermelo, jednakże jego działalność miała odmienny charakter (przede wszystkim podkreślany był absolutny i obiektywny charakter postulatu) i dotyczyła tylko pierwszego okresu debaty wokół pewnika wyboru. Moore podkreśla, że po 1908 roku zasadniczo w ogóle nie pojawiały się publikacje podejmujące temat konsekwencji przyjęcia aksjomatu wyboru w matematyce lub pojawiały się akcydentalnie. Wśród matematyków, którzy mogliby mieć coś istotnego do powiedzenia w powyższej kwestii, wymienia on Georga Hamela, Friedricha Hartogsa i Bertranda Russella. Pierwsi dwaj opublikowali niestety bardzo niewiele prac na temat zastosowań AC w różnych dziedzinach matematyki. Ostatni mógł nawet być idealnym kandydatem na adwokata pewnika Zermela: sam przecież (równolegle

[2] Należy w tym miejscu podkreślić zasługi takich matematyków jak Michele Cipolla, Friedrich Hartogs, Ernst Steinitz, którzy badali aksjomat wyboru odpowiednio w analizie, teorii liczb kardynalnych i algebrze.

[3] G.H. Moore, *Zermelo's Axiom of Choice: Its Origins, Development and Influence*, New York 1982.

do Zermelo) sformułował aksjomatu multiplikatywny równoważny aksjomatowi wyboru. Ponadto Russell intensywnie badał zastosowania aksjomatu wyboru i zdawał sobie sprawę z jego wagi. W swoich rozważaniach pozostał on jednak ambiwalentny w stosunku do AC, zachęcając matematyków do dużej rezerwy względem pewnika wyboru. Zwracał szczególną uwagę na zbyt dużą ogólność postulatu Zermela, która mogła doprowadzić do zatracenia prawdziwego sensu AC.

Sytuacja zmieniła się diametralnie w 1916 roku, gdy na arenę batalii o aksjomat Zermela wkroczył wybitny polski matematyk, Wacław Sierpiński. Jego dociekania nad aksjomatem wyboru rozpoczęły się od lektury wykładów Russella z 1911 roku dotyczących AC. Sierpiński rozszerzył badania brytyjskiego logika o odkrycia wcześniejszych (jeszcze sprzed 1904 roku) nieuświadomionych użyć pewnika Zermela. Na samym początku skupił się on przede wszystkim na samej idei pewnika wyboru oraz zastosowaniach aksjomatu przeliczalnego wyboru[4] w analizie. Istotna część jego dokonań w kwestii AC została zawarta w pracach z 1916 i 1918 roku[5] oraz w kolejnych ar-

[4] Aksjomat przeliczalnego wyboru to osłabiona wersja aksjomatu wyboru. W tym szczególnym przypadku zakładamy, że zbiór indeksów J jest przeliczalny.

[5] W. Sierpiński, *Sur le rôle de l'axiome de M. Zermelo dans l'analyse moderne*, „Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences" 1916, 63, s. 688–691; W. Sierpiński, *L'axiome de M. Zermelo et son rôle dans la théorie des ensembles et l'analyse*, „Bulletin International de l'Académie des Sciences de Cracovie. Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles, Série A" 1918, s. 97–152.

tykułach w „Fundamenta Mathematicae". Szerokie podsumowanie swoich rozważań dotyczących AC przedstawił Sierpiński w książce *Zarys teorii mnogości*[6].

Sierpiński zajmował się aksjomatem wyboru przez niemal 30 lat. Idąc za Moore'em, podkreślmy, na czym polegała obrona AC przez polskiego matematyka. Przede wszystkim Sierpiński nie patrzył na aksjomat wyboru tak jak Zermelo. Nie można też nazwać jego działalności aktywną obroną. Poza tym nie traktował pewnika wyboru w kategoriach prawdy czy fałszu. Można powiedzieć, że jego stosunek do aksjomatu Zermela był raczej obojętny. Zdawał sobie sprawę, że wielu matematyków jest przeciwnych przyjmowaniu tego aksjomatu, co więcej, uważał ich stanowisko za w pełni uzasadnione pod warunkiem, że mieli oni świadomość wagi AC w matematyce. W swoich pracach Sierpiński dobitnie podkreślał, jak bardzo aksjomat wyboru jest wpisany nie tylko w teorię mnogości, lecz także w analizę. Zwracał uwagę, że w przypadku wielu twierdzeń pewnik wyboru jest po prostu nieodzowny. Równocześnie badał dokładnie zależności między różnymi wersjami aksjomatu Zermela a poszczególnymi twierdzeniami. Sierpiński uważał, że kluczowa dla matematyków winna być świadomość, w którym miejscu i jak stosujemy AC – czy jest on nieunikniony, czy można go ominąć. Swoim następcom pozostawił zadanie kontynuowania rozpoczętego dzieła – zbadania w podobny sposób całej matematyki.

[6] W. Sierpiński, *Zarys teorii mnogości*, cz. I, Warszawa 1928.

W niniejszej pracy chcemy wgłębić się przede wszystkim w filozoficzno-matematyczne zagadnienia poruszone przez Sierpińskiego, które wydają się rzucać ciekawe światło na aksjomat wyboru. Analizując poszczególne jego prace, zastanowimy się, co wniosły one do debaty wokół aksjomatu Zermela.

Jak rozumieć aksjomat wyboru?

Sierpiński, wprowadzając nas w *Zarysie teorii mnogości* w rozważania wokół aksjomatu wyboru, określa go jako pewnik, który wywołał sporo dyskusji wśród matematyków, a następnie podaje go w następującej postaci:

> Dla każdej mnogości[7] *M*, której elementami są zbiory *Z*, niepuste oraz nieposiadające elementów wspólnych, istnieje co najmniej jedna mnogość N, zawierająca po jednym i tylko jednym elemencie z każdego ze zbiorów *Z*[8] należących do *M*[9].

[7] Zgodnie ze współczesną nomenklaturą, zamiast określenia *mnogość* będziemy używać terminu *klasa*.
[8] Zbiór N nazywamy zbiorem wybierającym.
[9] Jest to sformułowanie zaproponowane przez Zermela w 1906 roku i nazywane dziś aksjomatem Zermela. Niemiecki matematyk w 1904 roku podał następującą formę aksjomatu wyboru: Przez ***M*** oznaczmy rodzinę wszystkich niepustych podzbiorów *M* zbioru M. Z każdym elementem *M'* ∈ ***M*** możemy związać pewien element *m'*, który należy do *M'* i może być nazwany wyróżnionym elementem M. Uzyskujemy

Polski matematyk zwraca dużą uwagę na fakt, że kluczowym zagadnieniem w rozważaniach wokół pewnika wyboru jest zrozumienie jego istoty. Przeanalizujmy jego sposób patrzenia na sam wybór i na idee aksjomatu. Zgodnie z przepisem Sierpińskiego należy najpierw rozważyć najprostszy przypadek tego aksjomatu. Załóżmy zatem, że M jest jednoelementowy, czyli składa się z jednego zbioru Z. Aksjomat wyboru w tym przypadku orzeka, że o ile Z jest niepusty, to istnieje element należący do tego zbioru. Oczywiście wypowiadając zdanie „zbiór Z jest niepusty", wiemy, że istnieje jakiś element należący do tego zbioru. Sierpiński zwraca uwagę na samo określenie *istnieje*. Pewnik wyboru nie wybiera, nie wskazuje elementu w dowolnym niepustym zbiorze, orzeka tylko (albo aż) jego istnienie. Właśnie w zagadnieniu istnienia upatruje Sierpiński główne źródło sporu wokół pewnika wyboru. Zatem odwieczny problem, fundamentalne pytanie filozofii matematyki – co znaczy, że jakiś obiekt istnieje? – zostało na nowo postawione właśnie w kontekście rozważań wokół aksjomatu wyboru. W tej filozoficznej kwestii trudno żądać jakichkolwiek rozstrzygnięć. Sierpiński, idąc za Zygmuntem Janiszewskim, rozważa podział na

---

w ten sposób „pokrycie" rodziny $\boldsymbol{M}$ elementami zbioru M i zbiór takich pokryć jest niepusty. Innymi słowy, Zermelo postulował istnienie funkcji γ: $\boldsymbol{M} \rightarrow$ M takiej, że $\gamma(M') \in M'$ dla dowolnego $M' \in \boldsymbol{M}$. Powyższe zdanie to pierwsze sformułowanie aksjomatu wyboru i tak najczęściej formułuje się go współcześnie, nazywając funkcję γ funkcją wyboru. Z kolei stwierdzenie o istnieniu „pokrycia sam Zermelo nazwał postulatem wyboru. Dla uporządkowania, dziś mówi się raczej o pewniku wyboru i podaje się go w postaci z przypisu 1.

idealistyczny i empirystyczny[10] punkt widzenia w sporze o uniwersalia. Dla idealistów *istnieć to znaczy istnieć.* Nie ma potrzeby precyzowania i tłumaczenia tego pojęcia, gdyż jest ono najprostsze i nieredukowalne. Możemy w tym miejscu dodać, zgodnie z przyjmowanym w matematyce platońskim stanowiskiem, że istnieć to być niesprzecznym. Innymi słowy, warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby jakiś obiekt matematyczny istniał, jest jego niesprzeczność. Fakt istnienia jest więc niezależny od podmiotu i jego działalności.

Z kolei według realistów (empirystów) istnieje tylko to, co człowiek potrafi zdefiniować. Niesprzeczność przestaje być warunkiem wystarczającym istnienia. Aby w ogóle móc zajmować się jakimkolwiek obiektem (odp. klasą), musimy umieć podać metodę jego konstrukcji (odp. metodę konstrukcji przedmiotów należących do rozważanej klasy). Nie ma więc żadnego sensu zajmować się indywiduami, co do których wiemy,

[10] Terminologia: *empiryczny* i *realistyczny* pochodzi od Zygmunta Janiszewskiego (zob. *O realizmie i idealizmie w matematyce*, „Przegląd Filozoficzny" 1916, t. 19). Z wprowadzonych tutaj określeń wynika, że możemy utożsamiać idealizm z platonizmem (realizmem), a empiryzm (realizm) z konstruktywizmem. Przed Janiszewskim Henri Lebesgue dzielił matematyków na takie właśnie dwie grupy. W obozie idealistów umieścił Lebesgue przede wszystkim Jacques'a Hadamarda, z kolei pośród empirystów wymieniał siebie, Émile'a Borela i René-Louisa Baire'a. Już Lebesgue zwracał uwagę na fakt, że przeprowadzony przez Zermala dowód zasady dobrego uporządkowania zbiorów wznowił spór między idealistami a empirystami (zob. *À propos de quelques travaux mathématiques récents*, „L'Enseignement Mathématique" 1971, 17 (2), s. 1–48).

iż nie da się ich w pełni zdefiniować. Pojęcie istnienia zostaje w pewien sposób zredukowane do pojęcia definicji. Co więcej, istnienie staje się zależne od podmiotu. Obiekty matematyki pozostają niczym więcej jak tylko wynikiem twórczej działalności ludzkiego umysłu. Sama zaś matematyka staje się zbiorem twierdzeń traktujących wyłącznie o przedmiotach, które można każde z osobna zdefiniować. Jeżeli rozważania te odniesiemy do aksjomatu wyboru, mamy dwie zupełnie różne odpowiedzi na pytanie o istnienie zbioru wybierającego *N*. Idealista odpowie zatem, że zbiór *N* jest dobrze określony; istnieje, jeśli mamy kryterium należenia do *N*. Realista zażąda, by dana była efektywna konstrukcja zbioru *N*.

Dla dalszych rozważań istotne jest, według Sierpińskiego, ustalenie, jak w praktyce matematyka wygląda dowód istnienia jakiegoś zbioru (czyli *de facto* jego niepustości). Najczęściej określa się jakiś obiekt *x*, o którym następnie udowadnia się, że należy do danego zbioru. Generalnie możemy pokazać istnienie zbioru jako wniosek z przyjętych aksjomatów i znanych wcześniej twierdzeń. Inny sposób dowodzenia to klasyczny dowód nie wprost – czyli przyjmujemy, że dany zbiór jest pusty i doprowadzamy do sprzeczności. Jednakże okazuje się, że przeprowadzone w taki sposób dowody często nie dają możliwości wskazania choćby jednego elementu rozważanego zbioru. Dla empirysty taki dowód nie ma żadnej wartości. Według Sierpińskiego, jeśli jesteśmy w stanie pokazać (wprost lub nie wprost), że określony element należy do pewnego zbioru, spełnia daną własność, to oznacza to, że potrafimy w sposób efektywny[11] udowodnić niepustość tego zbioru. Nie ma już potrzeby dodatkowo definiować jakiegoś elementu.

Mamy więc jasno sprecyzowane, co dla Sierpińskiego oznacza efektywny dowód, co znaczy podać w sposób efektywny przykład jakiegoś obiektu. Miejmy to na uwadze, prowadząc dalsze rozważania. Jest to założenie, które Sierpiński przyjmuje po analizie codziennej pracy matematyka. W pewien sposób odcina się od prowadzonych niejako z zewnątrz filozoficznych dysput nad dowodzeniem istnienia jakiegoś obiektu. Praktyka matematyczna staje się dla Sierpińskiego podstawowym źródłem rozstrzygnięć metodologicznych. Co więcej, kieruje on swoją uwagę na swego rodzaju sprzężenie zachodzące między wyborem, jaką matematykę uprawiamy (z AC czy bez), a przyjęciem określonej filozofii matematyki. Podkreśla bowiem, że jeśli przyjmuje się aksjomat wyboru, to należy opowiedzieć się za stanowiskiem idealistycznym w sporze o istnienie bytów matematycznych. Sierpiński pisze także, powołując się na Janiszewskiego, że empiryści wcale nie zaprzeczają aksjomatowi Zermela. Skłaniają się raczej ku stwierdzeniu, że dla nich AC po prostu jest całkowicie niezrozumiały, nie posiada ani treści, ani sensu. Sierpiński przyczynę takich niejasności upatruje w „nieszczęśliwym" określeniu *wybór*. Uważa, że przyjmując pewnik wyboru wcale nie orzekamy możliwości wybierania elementu

[11] Określenie *efektywny dowód* odnajdujemy w rozważanym tutaj kontekście w licznych pracach Sierpińskiego. Nie podnosimy kwestii, jak dowód efektywny ma się do dowodu konstruktywnego oraz do bardziej współczesnych określeń – *efektywnej obliczalności* itp.

z każdego zbioru z klasy *M*. Stwierdzamy raczej istnienie pewnej mnogości spełniającej daną własność. Dla Sierpińskiego pewnik wyboru to „pewnik istnienia”[12]. Wprowadzenie takiego określenia w kontekście powyższych rozważań jest w pełni uzasadnione. Uświadamia nam ono prawdziwą naturę aksjomatu wyboru i przenosi pytanie o istotę AC na grunt rozstrzygnięć filozoficznych w kwestii istnienia bytów matematycznych.

Na razie rozważyliśmy tylko przypadek, w którym zbiór *M* jest jednoelementowy. Rozszerzając nasze badania na klasę skończoną, nie napotkamy nowych wątpliwości. Kolejne problemy pojawiają się, jak zauważa Sierpiński, gdy *M* będzie nieskończony. Przyjmijmy najpierw, że *M* składa się ze zbiorów:

$$Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, \ldots$$

Pewnik Zermela orzeka po prostu, że można podać prawo, według którego każdemu ze zbiorów Z_n lub równoważnie każdej liczbie naturalnej n przyporządkowuje element p_n, należący do zbioru Z_n. Innymi słowy, dla dowolnego ciągu niepustych, rozłącznych zbiorów $(Z_n)_{n \in N}$ istnieje ciąg elementów $(p_n)_{n \in N}$, spełniający własność: dla każdej liczby naturalnej n, p_n jest elementem zbioru Z_n. Jednakże odmienną kwestią jest fakt realizacji, czyli efektywnego podania tego ciągu. W tym miejscu zauważamy poczynione przez Sierpińskiego rozróżnienie między zagadnieniem wyboru, czyli faktyczną

12 W. Sierpiński, *Zarys teorii mnogości*, *op. cit.*, s. 108.

realizacją pewnika wyboru, a tym o co *de facto* pewnik wyboru postuluje – samym tylko istnieniem. Aby unaocznić tę różnicę, rozważmy jeden z przykładów podanych przez Sierpińskiego.

Rozpatrzmy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych i podzielmy go na zbiory w następujący sposób: dwie liczby należą do tego samego zbioru, jeśli ich różnica jest wymierna; w przeciwnym przypadku należą do różnych zbiorów. Dostajemy w ten sposób klasę zbiorów rozłącznych i niepustych, przeliczalnych. Dla tej klasy na mocy pewnika wyboru istnieje zbiór, który ma dokładnie jeden element wspólny z każdym ze zbiorów rozważanej klasy. Jednakże nie potrafimy takiego zbioru dokładnie wyznaczyć: nie potrafimy wybrać po jednym elemencie z każdego ze zbiorów. Aksjomat wyboru gwarantuje nam tylko istnienie zbioru spełniającego określoną własność, ale nie zapewnia efektywnej jego definicji – nie gwarantuje przepisu wyboru.

Przy okazji powyższego przykładu, oprócz kwestii wyboru, narzuca się następny problem – co się dzieje, gdy zbiorów w klasie M jest nieprzeliczalnie wiele. Sierpiński nie czyni w tym miejscu żadnych rozstrzygnięć, sygnalizuje jedynie kolejny aspekt do rozważenia i przytacza różne stanowiska odnoszące się do powyższej kwestii. Oddają one podział w kierunkach empirystycznych (konstruktywistycznych): na matematyków, którzy jeśli skłaniają się ku zaakceptowaniu aksjomatu wyboru, to tylko w wersji dla klasy przeliczalnej, oraz na tych, którzy odrzucają każdą postać aksjomatu wyboru (poza przypadkiem skończonym), negując tym samym jakąkolwiek formę nieskończoności. Jest to zapowiedź późniejszej szerokiej dyskusji wokół ważności aksjomatu zależnego wyboru[13]. W świetle powyższego wydaje się istotne, aby zawsze mieć na uwadze, jaki aksjomat wyboru stosujemy – to znaczy określać po pierwsze moc rozważanej klasy, a po drugie moc zbiorów z tej klasy.

Sierpiński podkreśla, że niezależnie od tego, czy jesteśmy osobiście skłonni przyjąć pewnik Zermelo, czy też nie, niezależnie od tego, ile wątpliwości i problemów (przede wszystkim natury filozoficznej, choć nie tylko) nastręcza aksjomat wyboru, musimy liczyć się z jego rolą w teorii mnogości i analizie. Dodatkowo, skoro także matematycy kwestionowali ważność aksjomatu Zermela, tym bardziej należy podjąć zagadnienie rozróżnienia twierdzeń, w których jest on nieodzowny, od tych, w których można go uniknąć.

Rzetelne badanie, nie tylko teorii mnogości, lecz także innych dziedzin matematyki, pod kątem zależności poszczególnych wyników od aksjomatu wyboru było dla Sierpińskiego głównym zadaniem. Zdawał sobie sprawę z kontrowersji, jakie wywołał aksjomat wyboru, i śledził żywą dyskusję, która toczyła

[13] Aksjomat zależnego wyboru został sformułowany w 1942 roku przez Paula Bernaysa. Podaje się go najczęściej w następującej postaci: Dla dowolnej pary (X, r), gdzie X jest niepustym zbiorem, a relacja r spełnia warunek: dla dowolnego $x \in X$ istnieje $y \in X$, taki, że xry, wówczas istnieje ciąg $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ taki, że $x_n \, r \, x_{n+1}$. Jest to aksjomat, który ma większą moc dowodową niż aksjomat przeliczalnego wyboru i odgrywa istotną rolę w matematyce. Ponadto w pewien sposób jest on bardziej akceptowalny, przynajmniej przez niektórych matematyków reprezentujących nurt konstruktywistyczny.

się wokół „problematycznego" postulatu. Podkreślał, że oczywiście wolno nam przyjąć aksjomat wyboru, przyjąć jego zaprzeczenie lub po prostu go odrzucić[14], jednakże zawsze należy mieć świadomość trzech następujących, bardzo istotnych faktów:

> 1) wiele szczególnych przypadków aksjomatu wyboru jest prawdziwych;
> 2) z pewnika wyboru wynika wiele wniosków nieprowadzących do sprzeczności w matematyce;
> 3) aksjomat Zermela nie tylko istotnie upraszcza wiele fragmentów teorii mnogości i analizy, ale jest także nieodzownym narzędziem do udowodnienia wielu bardzo ważnych twierdzeń tych nauk[15].

Dlatego też tak istotne jest badanie twierdzeń opierających się na pewniku wyboru i ich dowodów, wychwytując te dowody, które istotnie zależą od aksjomatu Zermela. Następnie należy także zwrócić szczególną uwagę na określenie, jaka postać pewnika wyboru jest konieczna (minimalna), aby uzasadnić rozważane twierdzenie. Po trzecie, według Sierpińskiego, winno się również zbadać, jaka wersja aksjomatu wyboru wynika z da-

---

[14] Należy mieć świadomość, że przyjęcie zaprzeczenia AC nie jest równoważne z jego odrzuceniem.

[15] W. Sierpiński, *L'axiome de M. Zermelo…*, *op. cit.*, s. 97–98. Oczywiście aksjomat wyboru jest istotny dla uprawiania nie tylko dwóch wymienionych tutaj gałęzi matematyki, ale także między innymi dla topologii, algebry, analizy funkcjonalnej. Ponadto należy pamiętać, że właśnie polscy matematycy mieli duży udział w badaniu roli pewnika Zermela w matematyce, szczególnie w topologii.

nego twierdzenia. Innymi słowy, aby uzyskać pełny obraz roli AC w danym obszarze matematyki, należy przeprowadzić wyżej opisaną procedurę.

Rola aksjomatu wyboru w teorii mnogości, arytmetyce liczb kardynalnych oraz analizie

Zgodnie z opisanym wyżej paradygmatem badań Sierpiński bardzo dokładnie zajął się przede wszystkim analizą i teorią mnogości wraz z arytmetyką liczb kardynalnych. Będziemy chcieli przyjrzeć się jego wynikom i zrozumieć, jak w konkretnych przypadkach pracuje AC. Dokonamy skróconego przeglądu (według poszczególnych dziedzin matematyki) dokonań Sierpińskiego, opierając się w głównej mierze na jego pracach opublikowanych w latach 1920–1950 w „Fundamenta Mathematicae”[16] oraz w innych czasopismach naukowych[17].

[16] W. Sierpiński, *Une démonstration du théorème sur la structure des ensembles de points*, „Fundamenta Mathematicae” 1920, 1, s. 1–6; W. Sierpiński, *Sur un problème de M. Lebesgue*, „Fundamenta Mathematicae” 1920, s. 152–158; W. Sierpiński, *Les exemples effectifs et l’axiome du choix*, „Fundamenta Mathematicae” 1921, 2, s. 112–118; W. Sierpiński, *Sur l’égalité 2m = 2n pour les nombres cardinaux*, „Fundamenta Mathematicae” 1922, 3, s. 1–6; W. Sierpiński, *L’hypothèse généralisée du continu et l’axiome du choix*, „Fundamenta Mathematicae” 1947, 34, s. 1–5.

[17] W. Sierpiński, *Sur le rôle de l’axiome de M. Zermelo…*, *op. cit.*; W. Sierpiński, *L’axiome de M. Zermelo…*, *op. cit.*; W. Sierpiński, *Zarys teorii…*, *op. cit.*; W. Sierpiński, *Hypothèse du continu*, „Monografie Matematyczne”, t. 4, Warszawa 1934.

Pierwszy etap rozważań Sierpińskiego to przede wszystkim odróżnienie dowodów, w których aksjomat wyboru został użyty w sposób nieunikniony, od tych, w których jest po prostu uproszczeniem rozumowania i można go ominąć. Pod takim właśnie kątem rozważa i poprawia różne prace, między innymi twórcy teorii mnogości Georga Cantora. Porusza przede wszystkim kwestie analizy, a dokładniej pewnego rodzaju rozkładów przestrzeni euklidesowych *n*-wymiarowych[18]. Powyższe rozważania są szczególnie istotne w kontekście pełnienia przez Sierpińskiego funkcji adwokata aksjomatu wyboru. Rzetelne oddzielenie fragmentów matematyki istotnie zależnych od aksjomatu wyboru od tych, w których AC jest tylko wygodnym, jednakże nie nieodzownym narzędziem, pozwoliło obronić aksjomat Zermela przed jednym z elementów jego krytyki – zarzutem nieprzemyślanego i pochopnego powoływania się na pewnik wyboru. Z drugiej strony badania te pozwoliły na odkrycie kolejnych nieświadomych użyć aksjomatu wyboru przez wielu matematyków, także przez jego późniejszych przeciwników. Dzięki prowadzonym w ten sposób rozważaniom można budować „mapy", które pokazują, gdzie korzysta się z aksjomatu wyboru (i z jakiej jego postaci), przedstawiając tym samym relacje między różnymi modelami matema-

[18] Sierpiński rozważa w tym miejscu różne wersje twierdzenia Cantora-Bendixsona. Celowo nie przytaczamy dokładnie treści rozważanych prac Sierpińskiego, mają one bowiem czysto matematyczny charakter i ich zrozumienie wymaga zaawansowanej znajomości teorii mnogości i analizy.

tyki, wyznaczanymi właśnie przez przyjęcie określonej formy AC.

W 1916 roku Sierpiński, równolegle z Michele Cipolla, udowadnia, że przyjmowana dotychczas za niezależną od aksjomatu wyboru równoważność między ciągłością i ciągową ciągłością funkcji w punkcie istotnie zależy od AC (a dokładniej: od aksjomatu przeliczalnego wyboru). Istotnym etapem prowadzonych na gruncie analizy badań było wykazanie, że podstawowa własność miary Lebesgue'a – przeliczalna addytywność, wymaga przyjęcia aksjomatu przeliczalnego wyboru. Okazało się zatem, że u podstaw tworzonej przez Lebesgue'a teorii miary leży odrzucany i ostro przez niego krytykowany pewnik wyboru.

Sierpiński w swoich pracach uporządkował także wiele zależności między aksjomatem wyboru a różnymi zagadnieniami teorii mnogości. Zajmował się kwestiami różnych definicji skończoności i ich równoważności ufundowanych na aksjomacie wyboru. Badał twierdzenia dotyczące mocy zbiorów nieskończonych. Udowodnił, że bez odwołania się do aksjomatu wyboru można udowodnić następujący fakt:

Jeśli zbiór A jest niepoliczalny, zbiór B jest przeliczalny oraz A–B ma podzbiór przeliczalny, wówczas zbiór A–B ma taką samą moc jak zbiór A.

Zauważył także, że aksjomat wyboru odgrywa istotną (choć nie zawsze widoczną) rolę w arytmetyce liczb kardynalnych. Sierpiński badał różne własności liczb kardynalnych oraz nierówności między nimi, które okazywały się równoważne trychotomii liczb kardynalnych, a zatem także aksjomatowi wyboru.

Odrębnego omówienia wymaga artykuł pt. *Les exemples effectifs et l'axiome du choix*[19]. Poruszymy tutaj kwestie pewnych specyficznych zastosowań AC w teorii mnogości. W pracy tej Sierpiński rozważa sygnalizowane już przez nas wcześniej zagadnienia dowodów istnienia obiektów spełniających określoną własność. Dobitnie podkreśla, że jeśli mamy zdefiniowany pewien jednostkowy obiekt i potrafimy udowodnić, iż posiada on pewną własność P, wówczas mamy efektywny przykład obiektu spełniającego własność P, mamy zatem efektywny dowód niepustości pewnego zbioru. Aby unaocznić różnicę między dowodami efektywnymi i nieefektywnymi, przyjrzymy się kwestii istnienia liczb transcendentalnych (przestępnych). Przypomnijmy, że liczby przestępne to liczby rzeczywiste (szerzej: zespolone), które nie są algebraiczne, czyli nie są pierwiastkami żadnego równania wielomianowego jednej zmiennej o współczynnikach wymiernych. Problem niepustości zbioru liczb przestępnych podejmował między innymi Georg Cantor. Przeprowadził on następujący dowód istnienia w przedziale (0,1) liczb transcendentalnych.

Niech A oznacza zbiór wszystkich liczb algebraicznych należących do przedziału (0,1). Na mocy zasady wyłączonego środka możemy zapisać alternatywę:

$$\forall_{x\in(0,1)} x \in A \vee \sim\left(\forall_{x\in(0,1)} x \in A\right).$$

Korzystając z prawa przeczenia kwantyfikatora ogólnego, otrzymujemy:

[19] W. Sierpiński, *Les exemples effectifs…*, *op. cit.*

$$\forall_{x\in(0,1)} x \in A \vee \exists_{x\in(0,1)} \sim(x \in A).$$

Jeśli przyjmiemy pierwszy człon alternatywy, musimy wówczas orzec, że każda liczba z przedziału (0,1) jest algebraiczna. Pamiętając, że zbiór liczb algebraicznych jest przeliczalny, otrzymujemy, że przedział (0,1) także jest przeliczalny – sprzeczność. Prawdziwy musi być zatem drugi człon alternatywy. W przedziale (0,1) powinny istnieć liczby, które nie są algebraiczne. Mamy klasyczny przykład dowodu niepustości zbioru liczb przestępnych, który jest niekonstruktywny i nieefektywny. Jeżeli akceptujemy klasyczną logikę, to dowodowi temu nie można nic zarzucić. Staje się on jednakże bezwartościowy dla kogoś, kto chce mieć „namacalny" przykład liczby transcendentalnej – procedurę jej konstrukcji.

Zupełnie inny charakter mają według Sierpińskiego efektywne dowody istnienia liczb przestępnych. Dowody takie przeprowadzili między innymi Charles Hermite (pokazał, że liczba *e* jest przestępna), Ferdinand Lindemann (wykazał, że liczba π jest przestępna) oraz Joseph Liouville (udowodnił, że wszystkie liczby Liouville'a są przestępne). Dla przykładu przedstawimy skrócony dowód, że liczby Liouville'a nie są algebraiczne.

Przypomnijmy najpierw, że liczbą Liouville'a nazywamy każdą liczbę rzeczywistą x o tej własności, że dla dowolnej liczby naturalnej n istnieją liczby całkowite p i q ($q > 1$) takie, że:

$$0 < \left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^n}.$$

Niech x będzie zatem pewną liczbą Liouville'a. Najpierw pokażemy, że x jest niewymierna. Dla dowodu nie wprost załóżmy, że istnieje liczba całkowita a oraz liczba naturalna b, dla których $x = \frac{a}{b}$. Ustalmy $n \in \mathbb{N}$ takie, że $2^{n-1} > b$. Wówczas na mocy definicji liczby Liouville'a istnieją liczby całkowite p i q ($q > 1$) takie, że $\frac{p}{q} \neq \frac{a}{b}$

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| = \left|\frac{a}{b} - \frac{p}{q}\right| = \left|\frac{aq}{bq} - \frac{pb}{bq}\right| \geq \frac{1}{bq} > \frac{1}{2^{n-1}q} \geq \frac{1}{q^n}$$

sprzeczność. Do właściwego dowodu przestępności liczby x potrzebujemy pewnej własności algebraicznych liczb niewymiernych, którą przyjmujemy bez dowodu:

Dla dowolnej niewymiernej liczby algebraicznej y stopnia n istnieje taka stała A > 0, że dla dowolnych a,b $\in \mathbb{Z}$, *b > 0 prawdziwa jest nierówność* $\left|y - \frac{a}{b}\right| > \frac{A}{b^n}$.

Załóżmy teraz dla właściwego dowodu nie wprost, że x jest niewymierną liczbą algebraiczną stopnia n. Na mocy podanej wyżej własności istnieje stała A taka, że dla dowolnych liczb całkowitych p i q, $q > 1$ mamy

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| > \frac{A}{q^n}$$

Dla wskazanej stałej A możemy dobrać liczbę naturalną m taką, że

$$\frac{1}{2^m} < A.$$

Ponadto na mocy definicji liczby Liouville'a dla liczby naturalnej $n + m$ istnieją liczby całkowite p i q, $q > 1$, dla których

$$0 < \left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{n+m}}.$$

Łącząc wprowadzone nierówności, otrzymujemy:

$$0 < \left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{n+m}} \leq \frac{1}{2^m q^n} < \frac{A}{q^n} < \left|x - \frac{p}{g}\right|$$

sprzeczność.

Wykazaliśmy zatem, że każda liczba Liouville'a jest liczbą transcendentalną. Podobnie nie wprost, choć już nie za pomocą elementarnych metod, dowodzi się, że zarówno liczba e, jak i liczba π są przestępne. Za każdym razem mamy do czynienia z wykazaniem, że pewien konkretny, dobrze określony obiekt spełnia daną własność – w tym wypadku bycia liczbą transcendentalną. Nie ma potrzeby podawania dodatkowo procedury konstrukcji liczb przestępnych; wiemy, że takie istnieją i potrafimy dokładnie wskazać ich przykłady.

Okazuje się, że w wielu przypadkach używa się aksjomatu wyboru właśnie w takich efektywnych dowodach istnienia pewnych obiektów. Sierpiński podkreśla, że postępujemy w nich według następującego schematu:

1) definiujemy pewien konkretny obiekt, konstruujemy go (bez odwołania się do aksjomatu wyboru) lub rozważamy znany obiekt;
2) następnie dowodzimy o tym obiekcie, powołując się na aksjomat wyboru, że posiada on pożądaną własność.

Zajmiemy się teraz jednym z licznych przykładów efektywnych dowodów opierających się na aksjomacie wyboru. Rozważmy w tym celu za Sierpińskim wszystkie zbiory dobrze uporządkowane, których elementami są liczby rzeczywiste. Dzielimy je na klasy w następujący sposób: dwa zbiory A (z relacją dobrego porządku r) i B (z relacją s) należą do tej samej klasy wtedy i tylko wtedy, gdy są podobne, tzn. istnieje bijekcja taka, że dla dowolnych $x, y \in A$:

$$x r y \ \rightarrow \ f(x) s f(y)\,.$$

Niech E oznacza zbiór wszystkich wydzielonych w ten sposób klas. Zauważamy, że na tak powstałym zbiorze można określić relację dobrego porządku. Pada pytanie, jakiej mocy jest dobrze uporządkowany zbiór E. Okazuje się (bez odwołania do aksjomatu wyboru), że zbiór E na pewno nie jest mocy mniejszej bądź równej niż kontinuum. Skonstruowaliśmy zatem zbiór dobrze uporządkowany o mocy nie mniejszej i nie równej kontinuum. Jeśli powołamy się na aksjomat wyboru (a dokładniej: na twierdzenie równoważne – trychotomię liczb kardynalnych), otrzymujemy istnienie (z podaną metodą konstrukcji) zbioru dobrze uporządkowanego o mocy większej niż kontinuum. Podobnie można skonstruować bez odwoływania się do aksjomatu wyboru zbiór dobrze uporządkowany, którego moc nie jest mniejsza niż kontinuum i zarazem nie jest większa niż kontinuum. Aby orzec, że jest to zbiór dokładnie mocy kontinuum, musimy identyczne jak w poprzednim przypadku użyć prawa trychotomii liczb kardynalnych.

Sierpiński zainteresował się także aksjomatem wyboru w kontekście hipotezy kontinuum. W 1947 roku udowodnił, że uogólniona hipoteza kontinuum implikuje pewnik wyboru. Warto nadmienić, iż problem kontinuum, podobnie jak AC, przez wiele lat pozostawał przedmiotem jego gruntownych dociekań.

Znaczenie dokonań Sierpińskiego

Szerokie badania filozoficzne i matematyczne prowadzone wokół aksjomatu wyboru przez Wacława Sierpińskiego miały istotny wpływ na dzieje AC. Przede wszystkim zostały usystematyzowane kwestie filozoficzne i metodologiczne, jakie nieuchronnie trzeba podjąć, zajmując się aksjomatem wyboru. Dogłębnie zbadano istotę pewnika wyboru i jego treść. Można także powiedzieć, że dopiero Sierpiński wyznaczył właściwy kierunek i odpowiednią metodę badań matematycznych nad aksjomatem Zermela. Rozpoczął systematyczne, rzetelne badania, wolne od jakichkolwiek przemilczanych przedzałożeń. Konsekwentnie realizował swój program przez prawie 20 lat na gruncie teorii mnogości i analizy. Pozostawił także wyzwanie dokończenia rozpoczętego dzieła następnym pokoleniom. Jego pracę kontynuowała duża grupa polskich matematyków z Alfredem Tarskim na czele. Zaowocowało to pokaźną liczbą artykułów opublikowanych między innymi w czasopiśmie, którego współzałożycielem był także Wacław Sierpiński – „Fundamenta Mathematicae". Nie tylko to pismo, lecz także prowadzone przez Sierpińskiego badania były rozszerzeniem i realizacją programu Zygmunta Janiszewskiego rozwoju matematyki w Polsce po I wojnie światowej.

Sierpiński podkreślał również, że pewnik Zermela ma wartość heurystyczną – dzięki niemu odkrywamy prawdy, twierdzenia, konstruujemy ciekawe obiekty, które później powinniśmy próbować udowodnić, unikając aksjomatu wyboru. Mówiąc o jakimkolwiek twierdzeniu, którego dowód w sposób nieunikniony opiera się na AC, zawsze powinniśmy mieć świadomość, że *de facto* orzekamy, iż o ile prawdziwy jest aksjomat wyboru, o tyle zachodzi dane twierdzenie.

Zapoczątkowane przez Sierpińskiego i kontynuowane przez polskich matematyków badania nad aksjomatem wyboru pozwoliły na odkrycie nowych technik w matematyce, które stały się użytecznym narzędziem w rozwiązywaniu różnych problemów matematycznych, logicznych i metamatematycznych. Wpłynęły istotnie na dzieje pewnika Zermela i dzieje całej dwudziestowiecznej matematyki.

Bibliografia

J. Dadaczyński, *Filozofia matematyki Immanuela Kanta i jej dziedzictwo*, „Zagadnienia Filozoficzne w Nauce” 1999, XXIV, s. 26– 42.

Z. Janiszewski, *O realizmie i idealizmie w matematyce*, „Przegląd filozoficzny” 1916, 19, s. 161–170.

H. Lebesgue, *A propos de quelques travaux mathematiques recents*, „Enseignement Mathematik”, (2) 17, s. 1–48.

G.H. Moore, *Zermelo's axiom of choice, its origins, influence and development*, Nowy York 1982.

W. Sierpiński, *Sur le ròle de l'axiome de M Zermelo dans l'anlyse moderne*, „Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences” 1916, 63, s. 688–691.

W. Sierpiński, *L'axiome de M Zermelo et son ròle dans la théorie des ensembles et l'analyse*, „Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie, Classe des Sciences Mathématiques et naturelles” 1918, Série A, s. 97–152.

W. Sierpiński, *Une démonstration du théoréme sur la structure des ensembles de point*, „Fundamenta Mathematicae” 1920, 1, s. 1–6.

W. Sierpiński, *Sur un problème de M Lebesgue*, „Fundamenta Mathematicae” 1920, s. 152–158.

W. Sierpiński, *Les exemples effictifs et l'axiome du choix*, „Fundamenta Mathematicae” 1921, 2, s. 112–118.

W. Sierpiński, *Sur l'égalite 2m=2n pour les nombres cardinaux*, „Fundamenta Mathematicae” 1922, 3, s. 1–6.

W. Sierpiński, *Zarys teorii mnogości*, część I, Warszawa 1928.

W. Sierpiński, *Hypothèse du continu,* „Monografie Matematyczne”, tom 4, Warszawa 1934.

W. Sierpiński, *L'hypothèse généralisée du continu et l'axiome du choix*, „Fundamenta Mathematicae” 1947, 34, s. 1–5.