

Prace z równań różniczkowych w „Pamiętniku Akademii Umiejętności w Krakowie”

Jan Koroński

Instytut Matematyki

Wydział Fizyki, Matematyki i Informatyki

Politechnika Krakowska

Papers concerning differential equations in the Memoirs of the Academy of Arts and Sciences in Cracow

Abstract

This paper concerns the general characteristics of the Academy of Arts and Sciences in Cracow and the Memoirs of the Academy of Arts and Sciences in Cracow. Moreover, in the context of the global development of the theory of differential equations we present in this paper the articles of Alojzy Jan Stodólkiewicz (1856-1934), Władysław Zajączkowski (1837-1898), Jan Rajewski (1857-1906), Wawrzyniec Żmurko (1824-1889) and Edward Władysław Skiba (1843-1911) on differential equations, which were published in the Memoirs of the Academy of Arts and Sciences in Cracow.

Key words:

differential equations, Memoirs of the Academy of Arts and Sciences in Cracow, papers on differential equations in Memoirs of the Academy of Arts and Sciences in Cracow

1. Ogólna charakterystyka Akademii Umiejętności w Krakowie

Akademia Umiejętności w Krakowie powstała w 1872 roku w wyniku przekształcenia działającego wcześniej Towarzystwa Naukowego Krakowskiego (1815–1872), które ściśle współpracowało z Uniwersytetem Jagiellońskim. Towarzystwo Naukowe Krakowskie założono 24 lipca 1815 roku z inicjatywy Jerzego Samuela Bandeckiego – bibliotekarza i bibliografa, filologa oraz historyka językoznawstwa i drukarstwa. Inicjatywę tę poparł ówczesny rektor Uniwersytetu Jagiellońskiego Walenty Litwiński. Do 1852 roku kolejni rektorzy UJ byli prezesami TNK. W tym towarzystwie do 1840 roku w TNK istniało sześć następujących wydziałów: teologii, prawa, medycyny, matematyki, literatury oraz gospodarstwa, wiadomości technicznych i wszelkich kunsztów. Po roku 1840 liczba wydziałów została zmniejszona do czterech. Od 1817 do 1872 roku TNK wydawało „Rocznik Towarzystwa Naukowego Krakowskiego z Uniwersytetem Krakowskim Połączonego”. W 1852 roku zawieszono działalność TNK, które reaktywowano w 1857 roku jako Cesarsko-Królewskie Towarzystwo Naukowe Krakowskie.

W 1872 roku, jak to już wyżej stwierdziliśmy, ck TNK zostało przekształcone w Akademię Umiejętności.

Oficjalna uroczystość otwarcia odbyła się w 1873 roku w obecności cesarza Franciszka Józefa. Na uwagę zasługuje fakt przekazania w 1893 roku Akademii Umiejętności w Krakowie zbioru Biblioteki Polskiej w Paryżu. Po pierwszej wojnie światowej w 1918 roku Akademia Umiejętności została przekształcona w Polską Akademię Umiejętności. Do 1952 roku PAU miała ogółem 676 członków krajowych i 264 zagranicznych. Po drugiej wojnie światowej jej niezależność nie była możliwa do zaakceptowania przez ówczesne władze komunistyczne PRL. Już w 1948 roku władze te ogłosiły, że powołają Polską Akademię Nauk. Tymczasem Polską Akademię Umiejętności programowo niszczone finansowo, a także poprzez blokowanie jej wydawnictw i kontaktów z zagranicą oraz poprzez cenzurę. Na zorganizowanym przez władze komunistyczne I Kongresie Nauki Polskiej w 1951 roku zlikwidowano PAU i Towarzystwo Naukowe Warszawskie, które działało od 1907 roku i stanowiło kontynuację działalności Towarzystwa Przyjaciół Nauk w Warszawie założonego w 1800 roku. Polska Akademia Nauk została powołana ustawą o Polskiej Akademii Nauk z 30 października 1951 roku. Cały majątek PAU skonfiskowano i przekazano wraz z wydawnictwami Polskiej Akademii Nauk. Na początku PAN była korporacją uczonych, jednak w 1960 roku została przekształcona w rządową instytucję centralną. Aż do 1990 roku sprawowała ogólną pieczę nad nauką w Polsce i zarządzała siecią instytutów naukowych. W latach 1957–1958 grupa uczonych

próbowała reaktywować PAU. Władze pod wpływem tych prób zgodziły się na utworzenie w Krakowie oddziału PAN. Dopiero w 1990 roku PAN straciła status instytucji rządowej, stając się ponownie korporacją uczonych i siecią instytutów naukowych. Powołany wówczas Komitet Badań Naukowych przejął funkcję sprawowania kontroli nad nauką na poziomie rządu. Odbudowa PAU była możliwa dopiero po zmianie ustroju w 1989 roku. PAU została odtworzona przez grupę członków na podstawie dawnego statutu, z zachowaniem ciągłości organizacyjnej i uwzględnieniem tradycyjnych form działania.

2. Spis prac naukowych w „Pamiętniku Akademii Umiejętności w Krakowie”

„Pamiętnik Akademii Umiejętności w Krakowie” był kontynuacją „Rocznika Towarzystwa Naukowego Krakowskiego z Uniwersytetem Krakowskim Połączonego”, którego wydrukowano 44 tomy od 1817 do 1872 roku. Pierwszy tom „Pamiętnika Akademii Umiejętności w Krakowie” wydrukowano w 1874 roku, a ostatni osiemnasty tom – w 1894 roku. Ogółem w „Pamiętniku” opublikowano 123 prace naukowe, w tym 43 prace z matematyki, a pozostałe 80 prac z różnych dziedzin przyrodniczych. Wśród prac matematycznych 11 prac dotyczyło równań różniczkowych, które są głównym celem niniejszego opracowania. Poniżej podamy spis wszystkich prac osiemnastu tomów „Pamiętnika AU w Krakowie”.

Tom I (1874)

1. A. Biesiadecki: *Anatomija patologiczna gruczołów skórnych*
2. Wł. Zajączkowski: *O całkach osobliwych zwyczajnych równań różniczkowych rzędu jakiegokolwiek*
3. W. Żmurko: *O styczności stożków obrotowych*
4. J.N. Franke: *Badania analityczne nad ruchem ciał stałych*
5. Wł. Gosiewski: *Przyczynek do teorii równowagi i ruchu ciała sztywnego*
6. E.W. Skiba: *Teoryja matematyczna pochłaniania światła*
7. E. Janczewski: *Poszukiwania nad wzrostem wierzchołkowym korzeni roślin okrytoziarnowych*
8. G. Piotrowski: *O chyżości rozchodzenia się światła w solach*
9. F. Strzelecki: *O czystości powietrza*
10. E.W. Skiba i K. Olszewski: *Wpływ temperatury na przewodnictwo galwaniczne wody*

Tom II (1876)

1. E. Janczewski: *Poszukiwania nad powstawaniem korzonków u roślin ziarnowych*
2. Dr A. Alth: *Rzecz o pochodzeniu belemnitów z mięczaków głowonogich oskorupionych*
3. Dr Oskar Fabian: *Obliczanie wartości szeregów nieskończonych, zwłaszcza szeregów bardzo słabiej zbieżności*
4. W. Żmurko: *Przyczynek do rachunku przemienności ze szczególnym uwzględnieniem znamion największości i najmniejszości całek oznaczonych*
5. Dr Iz. Kopernicki: *O czaszkach z kurhanów pokuckich*

6. D. Zbrożek: *Teoryja planimetru biegunowego*
7. Fr. Mertens: *O funkcji osculacyjnej Profesora Żmurki*
8. Dr J. Rostafiński: *Historyja rozwoju wydełki krzonkowłosiej*
9. Prof. dr Karliński: *O okresowych zmianach ciepłoty powietrza w Krakowie*

Tom III (1877)

1. Dr Wł. Zajączkowski: *Teoryja ogólna rozwiązań osobliwych równań różniczkowych zwyczajnych*
2. W. Żmurko: *O ważności i zastosowaniu funkcji osculacyjnej w rachunku przemienności, oraz odpowiedź na uwagi Dra Mertensa dotyczące tego przedmiotu*
3. Dr Fr. Kamieński: *Anatomija porównawcza pierwiastkowatych (z 10 tablicami)*
4. W. Żmurko: *O ważności i zastosowaniu funkcji osculacyjnej w rachunku przemienności, część druga (dokończenie)*
5. Jan N. Franke: *O niektórych zagadnieniach kinematyki na zasadzie ruchu powierzchni skośnych*
6. Dr Ed. Skiba: *Przyczynek do teoryi strun*
7. J. Tetmajer: *Teoryja rozwinięcia funkcji niewyraźnych*
Wstęp
Część pierwsza: O szeregach w ogólności
Część druga: Rozwój funkcji wyraźnych
Część trzecia: Rozwój funkcji niewyraźnych
Rozdział I: Wzory ogólne do rozwinięcia funkcji niewyraźnych (ciąg dalszy tej rozprawy w IV tomie „Pamiętnika Akademii” str. 1)

Tom IV (1878)

1. J. Tetmajer: *Teoryja rozwinięcia funkcij niewyraźnych. Część trzecia* (część I i II, tudzież rozdział I części III są zamieszczone w III tomie „Pamiętnika Akademii” str. 155–188)
2. Z. Kahane: *Budowa tasiemca nastroszonego (Taenia perforiata Göze) jako przyczynek do anatomii i histologii ogniwców (Cestodes)*
3. Dr Henryk Kadyi: *O oku kreta pospolitego (talpa europea) pod względem porównawczo-anatomicznym*
4. Dr D. Wierzbicki: *Ruch dzienny prężności pary i wilgotności powietrza w Krakowie* (Część I pracy większej pod tytułem: *Peryjodyczne zmiany prężności pary i wilgotności powietrza w Krakowie*. Część druga zamieszczoną zostanie w tomie V „Pamiętnika Akademii”)
5. Dr L. Nowakowski: *Przyczynek do morfologii i systematyki skoczków (Chytridiaceae)*

Tom V (1880)

1. Józef Tetmajer: *Rozwiązanie równań trzechwyrazowych*
2. Dr A. Rehman: *Geobotaniczne stosunki południowej Afryki* (Tabl. I, II i III)
3. Dr D. Wierzbicki: *Peryjodyczne zmiany prężności pary i wilgotności powietrza w Krakowie. Część druga* (Tabl. IV i V)
4. Józef Tetmajer: *Dodatek do rozwiązania trygonometrycznego równań dwuwyrazowych*
5. Prof. dr Gustaw Piotrowski: *O stosunku między ciężarem gatunkowym a składem chemicznym ciał stałych nieorganicznych*

6. Prof. dr Bronisław Radziszewski: *Badania nad zjawiskami fosforescencyj ciał organicznych i uorganicznych*

Tom VI (1881)

1. Dr Alojzy Alth: *Wapień Niżniowski i jego skamieliny (z 12 tablicami)*
2. Ignacy Szyszłowicz: *O zbiornikach olejków lotnych w królestwie roślinném (z 7 tablicami)*
3. Dr Władysław Zajączkowski: *Teoryjka wyznaczników o p wymiarach*

Tom VII (1882)

1. Prof. Włodzimierz Brodowski: *Przyczynek do anatomii patologicznej wątroby (z 1 tablicą)*
2. Jan Nep. Franke: *O inwolucyi sześciu prostych, uważanych jako osi skrętów chwilowych*
3. Dr Izidor Kopernicji: *O kościach i czaszkach Ainosów (z 4 tablicami)*
4. Władysław Kretkowski: *O przekształceniach pewnych wielomianów jednorodnych drugiego stopnia*
5. Dr Ludwik Birkenmajer: *O kinetycznej równowadze elipsoidy nieobrotowej pod wpływem grawitacji i siły odśrodkowej*
6. Dr Fr. Kamieński: *Narzędzia odżywcze Korzeniówki (Monotropa Hypopitys) (z 3 tablicami)*
7. Dr Emil Godlewski: *Studyja nad oddychaniem roślin*
8. Dr Kazimierz Olearski: *O elektrycznych oscylacjach*
9. Władysław Kretkowski: *O rozwiązywaniu równań algebraicznych ogólnych za pomocą całek oznaczonych*

10. Władysław Kretkowski: *O niektórych wzorach rachunku różniczkowego*
11. Jan Nep. Franke: *Teoryjka analityczna kompleksów śrub chwilowych*

Tom VIII (1883)

1. Władysław Kulczyński: *Opisy nowych gatunków pajków z Tatr, Babięj Góry i Karpat Szląskich (Tablica I, II i III)*
2. Edward i Władysław Natansonowie: *O przyciąganiu się atomów i ruchu ich w cząsteczkach gazów*
3. Dr Wawrzyniec Żmurko: *O całkowaniu równań różniczkowych liniowych rzędu drugiego o współczynnikach liniowych*
4. Eugeniusz Dziewulski: *Zagęszczenia optyczne mieszanin wody i alkoholu (Tab. IV, V, VI i VII)*
5. A.J. Stodółkiewicz: *Zastosowanie sposobu Bertranda do całkowania równania różniczkowego o różniczkach zupełnych z wielu zmiennymi*
6. A.J. Stodółkiewicz: *Całkowanie układów równań różniczkowych o różniczkach zupełnych*
7. Dr Leon Nowakowski: *Entomophthoreae. Przyczynek do znajomości pasożytnych grzybków sprawiających pomór owadów (Tab. VIII, IX, X, XI i XII)*

Tom IX (1884)

1. Dr Władysław Zajączkowski: *O zamianie funkcji całkowitej i jednorodnej stopnia 2go na sumę kwadratów*
2. Władysław Kretkowski: *Dowód pewnego twierdzenia tyżącego się dwóch wyznaczników ogólnych*

3. Dr Józef Puzyna: *O pozornie dwuwartościowych określonych całkach podwójnych*
4. Dr Stefan Puzyna: *Przebieg roczny ciepłoty powietrza w Krakowie obliczony na podstawie pięćdziesięcioletnich spostrzeżeń (1826–1875) sposobem nowym, prostszym i ściślejszym niż dotąd używane. (Tablica I)*
5. A.J. Stodółkiewicz: *O całkowaniu równań różniczkowych liniowych rzędu drugiego, mających współczynniki liniowe, przy pomocy kwadratur*
6. Jan Rajewski: *O całkowaniu równań różniczkowych liniowych rzędu drugiego, w postaci $(c_2x^2 + b_2x + a_2)y'' + (b_1x + a_1)y' + a_0y = 0$*
7. Dr Emil Godlewski: *Przyczynek do teorii krążenia soków u roślin. (Tablica II)*
8. Dominik Zbrożek: *Zastosowanie wyznaczników w teorii najmniejszych kwadratów*

Tom X (1885)

1. Dr A. Jaworski: *O swobodnym rozplemie wewnętrznym (endogenezie) komórek Tab. I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX)*
2. Dr Stefan Kuczyński: *Porównanie co do ścisłości sześciu wzorów służących do obliczania przebiegu rocznego ciepłoty w miejscu daném*
3. F. Mertens: *O niezmiennikach jednej i dwóch form dwulinijowych alternujących*
4. M. Raciborski: *Opisy nowych desmidyjów polskich (Tab. X, XI, XII, XIII i XIV)*

Tom XI (1885)

1. Godfryd Ossowski: *Jaskinie okolic Ojcowa pod względem paleoetnologicznym (z 2 tablicami litografowanemi Tab. II i III i 6 fotodrukowanemi Tab. I, IV, V, VI, VII i VIII). Do str. 45 dodaną jest tablica drukowana z napisem: „Obraz chronologiczny budowy geologicznej i zabytków zawartych w namuliskach jaskiń zbadanych na ziemiach polskich po rok 1848”*
2. Dr J. Rostafiński: *De plantis quae in „Capitulari de villis et curtis imperialibus” Caroli Magni commemorantur. Jako materyjal do historyi hodowli roślin w Polsce*
3. Jan Nep. Franke: *O wyrównaniu chyżości biegu nieustannego machin parowych*
4. Władysław Kulczyński: *Pająki zebrane na Kamczatce przez Dra Dybowskiego. (Tablica IX, X i XI)*

Tom XII (1886)

1. F. Mertens: *O utworach niezmiennicznych form kwadratowych*
2. Jan Nep. Franke: *O kręceniu się ciała stałego około punktu*
3. Dr Władysław Szajnocha: *O kilku gatunkach ryb kopalnych z Monte-Bolca pod Weroną, znajdujących się w gabinecie geologicznym Uniwersytetu Jagiellońskiego (Tablica I, II, III i IV)*
4. Dr Wawrzyniec Żmurko: *Uzasadnienie niektórych ważniejszych uproszczeń algebraicznej rachuby oparte na bliższém rozważaniu algebraicznego dzielenia*
5. S. Dickstein: *O niektórych własnościach funkcyj alef*
6. S. Dickstein: *O twierdzeniu Crocchiego*

7. Dr J. Kopernicji: *Czaszki Ainów według nowych materyjałów (Tablica V, VI i VII)*
8. S. Dickstein: *Dowód dwóch wzorów Wrońskiego*
9. A.J. Stodółkiewicz: *O dwóch szczególnych układach równań różniczkowych o różniczkach zupełnych*

Tom XIII (1887)

1. Dr med. Konrad Rumszewicz: *Mięśnie śródoczne u ptaków (Tablica I, II i III)*
2. Dr Ludwik Birkenmajer: *Nowa teoria kształtu i grawitacji Ziemi*
3. Władysław Kretkowski: *O wyznaczeniu kuli przecinającej pod tym samym kątem ilekolwiek kul danych i o zagadnieniach podobnych*
4. Władysław Kretkowski: *O pewnych zagadnieniach geometrii kulistej*
5. Dr W. Antoni Gluziński: *O fizjologicznem i leczniczem działaniu siarkanu sparteiny (Tablica IV, V i VI)*
6. Władysław Zajączkowski: *Teoryja Fuchsa równań różniczkowych liniowych i jednorodnych z jedną zmienną niezależną*
7. A.W. Witkowski: *O kilku przypadkach ruchu cieczy, zależnych od spójności*

Tom XIV (1888)

1. Dr Józef Puzyna: *O zastosowaniu uogólnionych form interpolacyjnych Lagrange'a (Tab. I)*
2. Dr Stanisław Żurakowski: *Dowód twierdzenia H. Wrońskiego*

3. Dr A. Walentowicz: *O przypadku dwupłciowości obustronnej u świni (Hermaphroditismus bilateralis) (Tab. II i III)*
4. Dr W. Teisseyre: *Studycja paleontologiczne I. Proplanulites novum genus (Tab. IV i V)*
5. Franciszek Tomaszewski: *Przyczynek do znajomości stałej dielektrycznej płynów (Tab. VI)*
6. Prof. J. Rostafiński: *Porównanie tak zwanych zielników Falmirza, Spiczynskiego i Siennika*
7. Prof. J. Rostafiński: *Nasza literatura botaniczna XVI wieku oraz jej autorowie lub tłumacze*
8. Prof. W. Żmurko: *O powierzchniach sprzężonych z powierzchniami rzędu drugiego*

Tom XV (1888)

1. H. Kadyi: *O naczyniach krwionośnych rdzenia pacierzowego (Tablice I–X)*
 - Wstęp
 - I. Literatura
 - II. Metoda badania
 - III. O pniach tętnicznych i żytnych zaopatrujących rdzeń
 - IV. O naczyniach krwionośnych opony miękkiej
 - V. O rozgałęzieniach naczyń krwionośnych w rdzeniu
 - VI. O naczyniach włosowatych rdzenia
 - VII. Poglądy morfologiczne na naczynia krwionośne rdzenia
 - VIII. W kwestyi naczyń limfatycznych rdzenia
 - IX. Objaśnienie tablic
2. Władysław Satke: *Ciepłota w Tarnopolu*

3. Adolf Beck: *O pobudliwości różnych miejsc tego samego nerwu (Tab. XI)*

Tom XVI (1889)

1. Dr Gustaw Piotrowski: *Przyczynek do nauki o unerwieniu naczyń*
2. S. Dickstein: *Kilka twierdzeń o funkcjach alef*
3. Prof. Franciszek Mertens: *O wyznaczniku, którego elementami są wartości $n!$ funkcji całkowitych*
4. Prof. Emil Dunikowski: *O gąbkach cenomańskich z warstwy fosforytowej Podola galicyjskiego (z trzema tablicami)*
5. Prof. Władysław Szajnocha: *Pholadomyocardia Jelskii n.g., n.sp. (z tablicą)*
6. Dr G. Piotrowski: *Wpływ ciśnienia w jamie brzusznej na tętno i parcie ościenne krwi (z dwiema tablicami)*
7. St. Czaplński i Al. Rosner: *O drogach, któremi tłuszcz i mydło dostają się z jelit do obiegu ogólnego (z dwiema tablicami)*
8. Dr G. Piotrowski: *O pobudliwości i zdolności przewodzenia stanu czynnego w nerwach i mięśniach (z trzema tablicami)*
9. Franciszek Tondera: *Opis flory kopalnej pokładów węglowych Jaworzna, Dąbkowy i Sierszy (z dwiema tablicami)*

Tom XVII (1890)

1. Dr Gustaw Piotrowski: *O pobudliwości i zdolności przewodzenia stanu czynnego w nerwach i mięśniach*
2. Józef Puzyna: *O pewnym twierdzeniu F. Foliego*
3. Dr Józef Siemiradzki: *O mięczakach głowonogich brunatnego jura w Popielanach na Żmudzi (z czterema tablicami)*

4. M. Raciborski: *Nowe desmidyje (z czterema tablicami)*
5. Dr Józef Siemiradzki: *O faunie kopalnej warstw brunatnego jura w Popielanach na Żmudzi*
6. Władysław Gosiewski: *O ciśnieniu kinetycznym w płynie nieściśliwym i jednorodnym*
7. Władysław Gosiewski: *O naturze ruchu wewnątrz elementu płynnego*
8. F. Mertens: *O funkcjach całkowitych układu m zmiennych, tworzących m wierszy i n kolumn*
9. Jan Rajewski: *O całkach nieregularnych równań różniczkowych liniowych*
10. Tadeusz Wiśniowski: *Mikrofauna ilów ornatowych okolicy Krakowa. Część I. Otwornice górnego Kellowayu we Grojcu (z trzema tablicami)*

Tom XVIII (1894)

1. Dr J. Siemiradzki: *Fauna kopalna warstw oxfordzkich i kimezydzkich w okręgu krakowskim i przyległych częściach Królestwa Polskiego. Część I. Głownogi. (Z pięcioma tablicami i licznymi rycinami w tekście)*
2. Dr J. Siemiradzki: *Fauna kopalna warstw oxfordzkich i kimezydzkich w okręgu krakowskim i przyległych częściach Królestwa Polskiego. Część II. Ślimaki, małże, ramionoplawy i szkarłupnie*
3. Maryan Raciborski: *Flora kopalna ogniotrwałych gliniek krakowskich. Część I. Rodniowce (Archaegoniatae) (z dwudziestoma dwiema tablicami)*

3. Prace z równań różniczkowych w „Pamiętniku Akademii Umiejętności w Krakowie”

Prace z zakresu równań różniczkowych w „Pamiętniku Akademii Umiejętności w Krakowie” opublikowało pięciu następujących matematyków: Alojzy Jan Stodółkiewicz (1856–1934) – cztery prace, Władysław Zajączkowski (1837–1898) – trzy prace, Jan Rajewski (1857–1906) – dwie prace i po jednej pracy Wawrzyniec Żmurko (1824–1889) oraz Edward Władysław Skiba (1843–1911).

Dziesięć z jedenastu prac z równań różniczkowych opublikowanych w „Pamiętniku” można podzielić pod względem tematycznym na trzy grupy. Grupę pierwszą stanowi pięć prac dotyczących zwyczajnych równań różniczkowych liniowych rzędu drugiego. Ich autorami są: Wawrzyniec Żmurko – t. VIII (1883), Alojzy Jan Stodółkiewicz – t. IX (1884), Jan Rajewski – t. IX (1884) i t. XVII (1990) oraz Władysław Zajączkowski – t. XIII (1887). Prace Stodółkiewicza i Rajewskiego z tomu IX nawiązują do pracy Żmurki z tomu VIII, natomiast praca Rajewskiego z tomu XVII nawiązuje do pracy Zajączkowskiego z tomu XIII. Grupa druga prac dotyczy równań różniczkowych o różniczkach zupełnych i tu należy zaliczyć trzy prace Stodółkiewicza – dwie z nich znajdują się w tomie VIII (1883), a trzecia w tomie XII (1886). Grupę trzecią stanowią dwie prace Zajączkowskiego o całkach osobliwych równań różniczkowych opublikowane w tomach I (1874) i III (1877). Jedenasta praca autorstwa Edwarda Skiby zamieszczona w tomie III (1877) do-

tyczy równania cząstkowego typu hiperbolicznego, a mianowicie równania struny.

Poniżej krótko scharakteryzujemy wymienione wyżej prace.

3.1. Prace Władysława Zajączkowskiego o całkach osobliwych dla równań różniczkowych zwyczajnych:

- I. *O całkach osobliwych zwyczajnych równań różniczkowych rzędu jakiegokolwiek*, „Pamiętnik Akademii Umiejętności w Krakowie”, t. I (1874),
- II. *Teoryja ogólna rozwiązań osobliwych równań różniczkowych zwyczajnych*, „Pamiętnik Akademii Umiejętności w Krakowie”, t. III (1877).

Rozwiązaniami osobliwymi dla równań różniczkowych zwyczajnych rzędu pierwszego zajmowali się Gottfried Wilhelm Leibniz (1694), Brook Taylor (1715), Alexis Clairaut (1734), Leonhard Euler (1756), który podał sposób odróżnienia rozwiązania osobliwego od szczególnego, Pierre Simon de Laplace (1772), który podał sposób wyprowadzenia rozwiązania osobliwego z samego równania różniczkowego, i Joseph-Louis Lagrange, który w pracy *Leçons sur le calcul des fonctions* wykazał związek między rozwiązaniem osobliwym a rozwiązaniem zupełnym¹.

¹ W. Zajączkowski, *Teoryja ogólna rozwiązań osobliwych równań różniczkowych zwyczajnych*, „Pamiętnik Akademii Umiejętności w Krakowie”, t. III, 1877, s. 1–23.

Ad I. W pracy *O całkach osobliwych zwyczajnych równań różniczkowych rzędu jakiegokolwiek* Zajączkowski stwierdza, że praca Lagrange'a obejmuje wszystko, co do 1774 roku o rozwiązaniach osobliwych dla równań różniczkowych zwyczajnych rzędu pierwszego było wiadomo, jednak posiada zbyt wiele nieścisłości i braków, których w ówczesnym stanie nauki nie można było tolerować. Praca Lagrange'a nie zawiera np. kryterium odróżnienia rozwiązania osobliwego od szczególnego. Wskazane braki zostały usunięte przez Augustusa De Morgana w *Cambridge Philosophical Transactions* (vol. IX, cz. II) i przez George'a Bolle'a w *A Treatise on Differentia equations* (s. 139–182).

W przypadku równań różniczkowych zwyczajnych rzędów wyższych problem rozwiązań osobliwych był nadal nieuporządkowany. Zajął się tym W. Zajączkowski w omawianej tu pracy. Wykazał on, jaki związek zachodzi między całką osobliwą a całką zupełną i podał dwa sposoby wyprowadzenia całki osobliwej z całki zupełnej. Dalej wyprowadził całkę osobliwą z całki pierwszej, czego nie zrobił Lagrange, gdyż nie rozważał całki pierwszej rozwiązanej co do najwyższej pochodnej. W dalszym ciągu Zajączkowski wyprowadził całkę osobliwą z samego równania różniczkowego, dochodząc do dwóch równań warunkowych, które były znane również Lagrange'owi. Jednak Lagrange nie zauważył, że na podstawie drugiego równania warunkowego można uzyskać całkę osobliwą, o ile zajdzie pewien dodatkowy warunek niezerowania się pewnego wyznacznika. Ten dodatkowy

warunek w przypadku równań różniczkowych zwyczajnych rzędu pierwszego sformułował De Morgan. W końcowej części Zajączkowski wskazał kryterium pozwalające odróżnić rozwiązanie szczególne od rozwiązania osobliwego dzięki uogólnieniu pewnego twierdzenia Boole’a, które wcześniej udowodnił Augustin-Louis Cauchy (zob. Moigno, *Calcu intégral*, vol. II, s. 445).

Ad II. We wstępie do pracy *Teoryja ogólna rozwiązań osobliwych równań różniczkowych zwyczajnych* Zajączkowskiego, czytamy co następuje:

W rozprawie o całkach osobliwych równań różniczkowych zwyczajnych rzędu jakiegokolwiek, zamieszczonej w tomie pierwszym „Pamiętnika Akademii Umiejętności”, starałem się uzupełnić niedostatki i usunąć niedokładności, jakie się napotyka w pracach geometrów, którzy pisali o tym przedmiocie. Już po wydrukowaniu téj pracy spostrzegłem, że teoryja całek osobliwych jednego równania różniczkowego zwyczajnego rzędu jakiegokolwiek z dwiema zmiennymi jest przypadkiem szczególnym daleko ogólniejszej teoryi rozwiązań osobliwych układu jednoczesnych równań różniczkowych zwyczajnych rzędu pierwszego, i z téj teoryi ogólniejszej daje się wyprowadzić sposobem o wiele jaśniejszym i ściślejszym.

W tej pracy Zajączkowski najpierw udowodnił istnienie rozwiązań osobliwych i pokazał, jaki związek zachodzi między rozwiązaniami osobliwymi i mnożnikiem Jacobiego układu

jednoczesnych² równań oraz podał sposób wyprowadzenia rozwiązań osobliwych z rozwiązań zupełnych. Następnie przeanalizował własności geometrii $(n + 1)$ wymiarowej i zaprezentował, jakie jest znaczenie geometryczne rozwiązań osobliwych układu jednoczesnych³ równań różniczkowych rzędu pierwszego. W dalszym ciągu uogólnił twierdzenie Darboux o rozwiązaniach osobliwych i przedstawił sposób na wyprowadzenie rozwiązań osobliwych z samych równań różniczkowych. W ostatniej części pracy Zajączkowski, wykorzystując wyniki uzyskane w tej pracy, zastosował je do równania różniczkowego zwyczajnego rzędu n -tego rozważanego w pracy *O całkach osobliwych zwyczajnych równań różniczkowych rzędu jakiegokolwiek* i w ten sposób uzupełnił wyniki uzyskane w tej pracy.

3.2. Praca Edwarda Skiby: *Przyczynek do teorii strun*, „Pamiętnik Akademii Umiejętności w Krakowie”, t. III (1877)

Edward Władysław Skiba urodził się 24 września 1843 roku. Był fizykiem teoretykiem. Studiował w latach 1861–1862 matematykę i filozofię na Uniwersytecie Jagiellońskim, a od 1862 do 1867 studiował na Wydziale Matematyczno-Fizycznym Szkoły Głównej Warszawskiej. Studia kontynuował w Heidelbergu. Po powrocie do kraju w 1869 roku uzyskał w UJ stopień dok-

² Tamże.

³ Tamże.

tora filozofii na podstawie pracy *Z teorii zjawisk włoskowatości*. W 1970 roku na podstawie dwóch prac: *Teoria zjawisk włoskowatości* i *Krytyczne przedstawienie mechanicznej teorii ciepła* uzyskał stopień docenta fizyki teoretycznej i docenta mechaniki. Od 1872 roku był profesorem nadzwyczajnym i kierownikiem Katedry Fizyki Matematycznej UJ. Przeszedł na emeryturę w 1880 roku. Zmarł w Krakowie 13 grudnia 1911 roku. W czasie emerytury intensywnie pracował naukowo. Zajmował się mechaniką, termodynamiką i równaniami różniczkowymi.

Praca Edwarda Skiby pt. *Przyczynek do teorii strun* była czytana na posiedzeniu Wydziału Matematyczno-Przyrodniczego Akademii Umiejętności w Krakowie 20 czerwca 1877 roku. Jej przedmiotem jest ściśle wyprowadzenie równania struny – nieliniowe w pewnych szczególnych przypadkach. Ściśle ogólne równanie struny wyprowadził Tadeusz Ważewski ponad 70 lat później, a mianowicie w latach czterdziestych XX wieku. Skiba poddaje krytyce wyprowadzenia równania struny uzyskane przez Gabriela Lamégo w *Leçons sur la théorie de l'élasticité des corps solides* i przez Gustava Roberta Kirchhoffa podane w *Vorlesungen über mathematische Physik*. Zarówno praca Lamégo, jak i Kirchhoffa zawierają zbyt wiele założeń i uproszczeń, które w rzeczywistości są spełnione dla równania struny tylko w nielicznych przypadkach. W swoim wyprowadzeniu równań struny Skiba uwzględnia oprócz drgań poprzecznych również drgania podłużne struny. Równania Lamégo i Kirchhoffa stają się szczególnymi przypadkami równania Skiby po dokonaniu pewnych dodatkowych założeń i uproszczeń.

3.3. Prace Alojzego Stodółkiewicza
o równań różniczkowych zupełnych:

- I. *Zastosowanie sposobu Bertranda do całkowania równania różniczkowego o różniczkach zupełnych z wielu zmiennymi*, „Pamiętnik Akademii Umiejętności w Krakowie”, t. VIII (1883),
- II. *Całkowanie układów równań różniczkowych o różniczkach zupełnych*, „Pamiętnik Akademii Umiejętności w Krakowie”, t. VIII (1883),
- III. *O dwóch szczególnych układach równań różniczkowych o różniczkach zupełnych*, „Pamiętnik Akademii Umiejętności w Krakowie”, t. XII (1886).

Ad I. W pracy *Zastosowanie sposobu Bertranda do całkowania równania różniczkowego o różniczkach zupełnych z wielu zmiennymi* („Comptes Rendus”, vol. 83 [1876]) Stodółkiewicz uogólnił metodę Bertranda rozwiązywania równania zupełnego z 1876 roku na równania zupełne o dowolnej liczbie zmiennych. Teoria rozwiązywania takich równań poparta jest dwoma konkretnymi przykładami.

Ad II. Praca *Całkowanie układów równań różniczkowych o różniczkach zupełnych* zawiera metodę rozwiązywania układu równań różniczkowych zupełnych n - m równań różniczkowych postaci. Stodółkiewicz istotnie wykorzystuje w niej warunki całkowalności sformułowane w monografii Władysława Zajączkowskiego *Wykład nauki o równaniach różniczkowych* (Wyd.

Towarzystwo Nauk Ścisłych w Paryżu, Paryż 1877, s. 499). Teoria rozwiązywania rozważanych tu układów równań jest zilustrowana dwoma konkretnymi przykładami rachunkowymi.

Ad III. W pracy *O dwóch szczególnych układach równań różniczkowych o różniczkach zupełnych* Stodółkiewicz nawiązuje do pracy Paula Appella *Sur certaines fonctions analogues aux fonctions circulaires* („Comptes Rendus”, vol. 84 [1877]), w której autor podał ciekawy i zręczny sposób rozwiązania pewnego szczególnego układu równań różniczkowych zupełnych o $2n - 1$ zmiennych niezależnych. Stodółkiewicz pokazał kolejne dwa układy równań różniczkowych zupełnych o $2n$ zmiennych niezależnych, ogólniejszej postaci od układu Appena, które dają się rozwiązać metodą Appella.

3.4. Prace Wawrzyńca Żmurki, Jana Rajewskiego, Alojzego Stodółkiewicza o jednorodnych równaniach różniczkowych zwyczajnych liniowych rzędu drugiego o zmiennych współczynnikach:

- I. Wawrzyniec Żmurko: *O całkowaniu równań różniczkowych liniowych rzędu drugiego o współczynnikach liniowych*, „Pamiętnik Akademii Umiejętności w Krakowie”, t. VIII (1883),
- II. A.J. Stodółkiewicz: *O całkowaniu równań różniczkowych liniowych rzędu drugiego, mających współczynniki liniowe, przy pomocy kwadratur*, „Pamiętnik Akademii Umiejętności w Krakowie”, t. IX (1884),

III. Jan Rajewski: *O całkowaniu równań różniczkowych liniowych rzędu drugiego, w postaci $(c_2x^2 + b_2x + a_2)y'' + (b_1x + a_1)y' + a_0y = 0$* , „Pamiętnik Akademii Umiejętności w Krakowie”, t. IX (1884).

Ad I. Przedmiotem pracy Żmurki *O całkowaniu równań różniczkowych liniowych rzędu drugiego o współczynnikach liniowych* jest rozwiązywanie równań różniczkowych liniowych rzędu drugiego o współczynnikach liniowych postaci:

$$(a_2 + x)y'' + (a_1 + b_1x)y' + (a_0 + b_0x)y = 0,$$

$$a_2y'' + (a_1 + x)y' + (a_0 + b_0x)y = 0,$$

$$a_2y'' + a_1y' + (a_0 + x)y = 0.$$

Za pomocą stosownych podstawień powyższe równania różniczkowe zostają rozpisane na sześć przypadków. Następnie Żmurko analizuje je w kontekście rozwiązywania, dokonując uściśleń i usuwając pewne usterki (np. konieczność użycia szeregów rozbieżnych), którymi obciążone były prace matematyków próbujących wcześniej rozwiązywać równania liniowe o zmiennych współczynnikach. Sprawa wyznaczenia liniowo niezależnych rozwiązań szczególnych dla jednorodnych równań różniczkowych liniowych o zmiennych współczynnikach, czyli sprawa wyznaczenia układów fundamentalnych dla równań różniczkowych liniowych o zmiennych współczynnikach (poza nielicznymi przypadkami, jak np. zwyczajne liniowe równanie Eulera), do teraz jest sprawą nierozwiązaną i jeszcze dzisiaj stanowi przedmiot prac naukowych twórczych matematyków. Żmurko nawiązuje do tekstu Andrzeja Winklera opublikowanego w zeszycie styczniowym „Rocznika Cesarskiej Akademii

Umiejętności” z 1873 roku oraz do dwóch książek Szymona Szpitzera: *Studien über die Integration, linearer Differentialgleichungen* (1860) i *Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen* (1878). Sam Żmurko tak charakteryzuje swoją pracę:

[...] Rezultaty w mej rozprawie uwidocznione w paragrafie 3. (34) (41) (42) zupełnie podobne do rezultatów zawartych w *Vorlesungen* etc. Zachodzi tylko ta dosadnia różnica, że moje wzory na mocy do skutku przeprowadzonego dowodna ostawanie się granic x i x' i dla argumentów z odjemnymi składnikami rzetelnymi – nie potrzebują już żadnych jakichkolwiek przysposobień, że moje wzory już bezpośrednio rozwiązują żądane równanie różniczkowe. Wskutek tego dowodu odpadają uciążliwe rozróżnienia równania różniczkowego na rozliczne przypadki według tego, czy składniki rzetelne argumentów A i A' są dodatniemi czy nie [...].

Ad II. Praca Stodółkiewicza *O całkowaniu równań różniczkowych liniowych rzędu drugiego, mających współczynniki liniowe, przy pomocy kwadratur* bezpośrednio nawiązuje do pracy Żmurki *O całkowaniu równań różniczkowych liniowych rzędu drugiego o współczynnikach liniowych*. Stodółkiewicz analizuje przypadki jednorodnych równań różniczkowych liniowych rzędu drugiego o współczynnikach liniowych, które dają się rozwiązać poprzez kwadratury. Do pracy dołączony jest konkretny przykład rachunkowy.

Ad III. W pracy *O całkowaniu równań różniczkowych liniowych rzędu drugiego, w postaci $(c_2x^2 + b_2x + a_2)y'' + (b_1x + a_1)y' + a_0y = 0$*

Rajewski rozważa równanie różniczkowe liniowe o zmiennych współczynnikach postaci $(c_2x^2 + b_2x + a_2)y'' + (b_1x + a_1)y' + a_0y = 0$ i analizuje przypadki, w których to równanie różniczkowe daje się sprowadzić do równań różniczkowych liniowych rzędu drugiego o współczynnikach liniowych rozważanych przez Żmurkę w pracy *O całkowaniu równań różniczkowych liniowych rzędu drugiego o współczynnikach liniowych*, którą omówiliśmy wyżej.

3.5. Prace Władysława Zajączkowskiego i Jana Rajewskiego o równaniach różniczkowych liniowych rzędu m -tego o współczynnikach zespolonych w dziedzinie zespolonej:

- I. Władysław Zajączkowski: *Teoryja Fuchsa równań różniczkowych liniowych i jednorodnych z jedną zmienną niezależną*, „Pamiętnik Akademii Umiejętności w Krakowie”, t. IX (1887),
- II. Jan Rajewski: *O całkach nieregularnych równań różniczkowych liniowych*, „Pamiętnik Akademii Umiejętności w Krakowie”, t. XVII (1890).

Ad I. *Teoryja Fuchsa równań różniczkowych liniowych i jednorodnych z jedną zmienną niezależną* jest pracą o charakterze przeglądowym i dotyczy równań różniczkowych liniowych jednorodnych rzędu m -tego w dziedzinie zespolonej. Zajączkowski zdecydował się na jej publikację w trosce o spopulary-

zowanie najnowszych wyników w równaniach różniczkowych w dziedzinie zespolonej wśród matematyków polskich, gdyż ta tematyka była ówczasie prawie w ogóle nieobecna w polu zainteresowań naukowych matematyków polskich. Praca ta wskazywała na nowy nurt w teorii równań różniczkowych. Coraz bardziej stawało się widoczne, że w teorii równań różniczkowych powinno chodzić nie tyle o kwadraturę danego równania różniczkowego, ile o wyprowadzanie z równania różniczkowego zachowania się i innych własności rozwiązań równań różniczkowych. Wyłaniała się tzw. jakościowa teoria równań różniczkowych. Sam Zajączkowski pisze o tym następująco:

[...] Te prace zainaugurowały nowy kierunek poszukiwań w dziedzinie równań różniczkowych i wywołały nader ożywiony ruch naukowy, osobliwie w Niemczech i we Francji. U nas ten nowy kierunek badań analitycznych zdaje się być mało znany; wszelkie bowiem prace z teorii równań różniczkowych, jakie u nas pojawiły się w ostatnich latach, nie wyjmując najnowszych, są pisane w duchu dawnej metody i, nie stojąc na gruncie teorii funkcji zmiennej zespolonej, nie licują z obecnym stanem tego działu umiejętności matematycznych. Sądziłem więc, że będzie pożyteczna, gdy główne wypadki, do jakich doszli geometrowie zagraniczni przynajmniej w teorii równań różniczkowych liniowych zestawię, zestawione uporządkuję i trudności, jakżeby się napotkało przy czytaniu prac oryginalnych, wyświecę i ułatwię.

Pracę niniejszą osnułem głównie na rozprawach podstawowych FUCHA, wszakże wprowadziłem wszystkie udoskonalenia

nia, jakie zawdzięczamy bądź to pracom późniejszym tego geometry, bądź też pracom innych geometrów, a w szczególności pracom FROBENIUSA, THOMÉGO i JORDANA, zamieszczonym w BORCHARDTA dzienniku; nadto wiele dowodzeń sam uprościłem. Szczęśliwym będę, jeżeli moje usiłowania przyczynią się do upowszechnienia tych nowych odkryć między naszymi matematykami i pobudzą ich do samodzielnej na tem polu pracy.

Ad II. Praca Rajewskiego *O całkach nieregularnych równań różniczkowych liniowych* jest niewątpliwie odpowiedzią na omawianą powyżej pracę przeglądową Zajączkowskiego o równaniach różniczkowych w dziedzinie zespolonej. Rajewski najpierw bada zachowanie się współczynników jednorodnego liniowego równania różniczkowego rzędu m -tego w otoczeniu punktów istotnie osobliwych rozwiązań szczególnych tego równania. Następnie zajmuje się wyznaczeniem postaci współczynników równania różniczkowego liniowego, którego rozwiązanie ogólne zawiera skończoną liczbę punktów osobliwych. W końcu podejmuje próby wyrażania postaci rozwiązań nieregularnych poprzez tzw. szeregi asymptotyczne lub w postaci przybliżonej, np. poprzez wielomiany.

4. Podsumowanie

Do końca lat trzydziestych XVIII wieku trwał etap początkowy rozwoju równań różniczkowych zwyczajnych⁴. W czasie tego etapu gromadzono materiał dotyczący rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych, lecz rezultaty były przypadkowe i fragmentaryczne, a sformułowania problemów niezadawalająco ściśle. Następnym etapem rozwoju równań różniczkowych, w czasie którego równania różniczkowe przekształciły się w odrębną dziedzinę analizy matematycznej, trwał około stu lat, gdzieś do lat czterdziestych XIX wieku. Wyróżnikiem tego etapu stały się cztery kierunki badań naukowych. Jednym z nich było poszukiwanie rozwiązań równań nieliniowych, które historycznie badano wcześniej niż równania liniowe⁵. Drugim kierunkiem badań była analiza równań i układów równań liniowych. Wreszcie trzecim kierunkiem było numeryczne (przybliżone) rozwiązywanie równań różniczkowych. Czwarty kierunek badań równań różniczkowych zwyczajnych stanowiło badanie rozwiązań osobliwych. Rozwiązanie osobliwe to takie, które nie daje się otrzymać z rozwiązania ogólnego przez specyfikację stałej dowolnej. Od lat dwudziestych XIX wieku gdzieś do połowy wieku XIX centralnymi problemami równań różnic-

⁴ R. Bujakiewicz-Korońska, J. Koroński, *Równania różniczkowe do końca XIX wieku*, Matematyka czasów Weierstrassa – Materiały XV Ogólnopolskiej Szkoły Historii Matematyki, Wydawnictwo Uniwersytetu Szczecińskiego, Szczecin 2002, s. 125–140.

⁵ Tamże.

kowych stały się problem jednoznaczności rozwiązań równań różniczkowych z warunkami początkowymi (ściśle powiązany z teorią rozwiązań osobliwych) oraz problem istnienia rozwiązań równań różniczkowych. Istotny wpływ na rozwój zagadnień granicznych dla równań zwyczajnych miało zainteresowanie się w połowie XIX wieku przez wielu wybitnych matematyków równaniami różniczkowymi cząstkowymi. Wreszcie w drugiej połowie XIX i na początku XX wieku centralnymi zagadnieniami równań różniczkowych stały się problemy jakościowej teorii równań różniczkowych. Lata trzydzieste XX wieku przyniosły z jednej strony uogólnienie pojęcia pochodnej, a z drugiej gwałtowny rozwój analizy funkcjonalnej, co istotnie wpłynęło na podejście do teorii równań różniczkowych. W XX wieku pojawiły się różne rodzaje rozwiązań równań różniczkowych i różne rodzaje teorii tych samych równań różniczkowych.

Bibliografia

- Bujakiewicz-Korońska R., Koroński J., *Równania różniczkowe do końca XIX wieku*, Matematyka czasów Weierstrassa – Materiały XV Ogólnopolskiej Szkoły Historii Matematyki, Wydawnictwo Uniwersytetu Szczecińskiego, Szczecin 2002, s. 125–140.
- Koroński J., *Władysław Zajączkowski (1837–1898) i jego monografia z równań różniczkowych*, „Antiquitates Mathematicae” 2009.

- Rajewski J., *O całkowaniu równań różniczkowych liniowych rzędu drugiego, w postaci $(c_2x^2 + b_2x + a_2)y'' + (b_1x + a_1)y' + a_0y = 0$* , „Pamiętnik Akademii Umiejętności w Krakowie”, t. IX (1884).
- Rajewski J., *O całkach nieregularnych równań różniczkowych liniowych*, „Pamiętnik Akademii Umiejętności w Krakowie”, t. XVII (1890).
- Skiba E., *Przyczynek do teorii strun*, „Pamiętnik Akademii Umiejętności w Krakowie”, t. III (1877).
- Stodółkiewicz A.J., *Zastosowanie sposobu Bertranda do całkowania równania różniczkowego o różniczkach zupełnych z wielu zmiennymi*, „Pamiętnik Akademii Umiejętności w Krakowie”, t. VIII (1883).
- Stodółkiewicz A.J., *Całkowanie układów równań różniczkowych o różniczkach zupełnych*, „Pamiętnik Akademii Umiejętności w Krakowie”, t. VIII (1883).
- Stodółkiewicz A.J., *O całkowaniu równań różniczkowych liniowych rzędu drugiego, mających współczynniki liniowe, przy pomocy kwadratur*, „Pamiętnik Akademii Umiejętności w Krakowie”, t. IX (1884).
- Stodółkiewicz A.J., *O dwóch szczególnych układach równań różniczkowych o różniczkach zupełnych*, „Pamiętnik Akademii Umiejętności w Krakowie”, t. XII (1886).
- Śródka A., Szczawiński P., *Biogramy uczonych polskich. Materiały o życiu i działalności członków AU w Krakowie, TNW, PAU, PAN, cz. III (nauki ścisłe)*, Wyd. Polskiej Akademii Nauk, Wrocław–Warszawa–Kraków–Gdańsk–Łódź 1986.

- Śródka A., *Uczeni polscy XIX–XX stulecia*, t. IV: S–Ż, Warszawa 1998.
- Zajączkowski W., *O całkach osobliwych zwyczajnych równań różniczkowych rzędu jakiegokolwiek*, „Pamiętnik Akademii Umiejętności w Krakowie”, t. I (1874), s. 12.
- Zajączkowski W., *Teoryja ogólna rozwiązań osobliwych równań różniczkowych zwyczajnych*, „Pamiętnik Akademii Umiejętności w Krakowie”, t. III (1877), s. 1–23.
- Zajączkowski W., *Wykład nauki o równaniach różniczkowych*, Wyd. Towarzystwo Nauk Ścisłych w Paryżu, Paryż 1877, s. 904.
- Zajączkowski W., *Teoryja Fucha równań różniczkowych liniowych i jednorodnych z jedną zmienną niezależną*, „Pamiętnik Akademii Umiejętności w Krakowie”, t. XIII (1887), s. 1–47.
- Żmurko W., *O całkowaniu równań różniczkowych liniowych rzędu drugiego o współczynnikach liniowych*, „Pamiętnik Akademii Umiejętności w Krakowie”, t. VIII (1883).