Gottlob Frege o liczbie
Przyczynek do określenia roli, jaką dla filozofów pełni historia matematyki

Gabriela Besler
Instytut Filozofii, Uniwersytet Śląski

Gottlob Frege on numbers
An attempt to determine the role of the history of mathematics in the work of philosophers

Abstract
In this paper I will focus on Frege's six crucial claims on numbers. I begin with indicating the reasons for his interest in this topic and conclude with a reflection on the role of the history of mathematics in the practice of philosophy. Frege believed that the study on numbers is a common task for both philosophers and mathematicians. In this article, priority is given to the philosophical aspect.

Key words:
history of mathematics, number, Gottlob Frege

> [...] gruntowne badania nad pojęciem liczby [*Zahlbegriff*] muszą jednak okazać się w pewnej mierze filozoficzne. Zadanie to jest bowiem wspólne matematyce i filozofii[1].

Wstęp

Ponad czterdziestoletni dorobek naukowy Gottloba Fregego był podporządkowany poszukiwaniu odpowiedzi na filozoficzno-matematyczno-logiczne pytanie „Czym jest liczba?”. Powszechnie uważa się, że Frege opracował jedną koncepcję liczby, odwołującą się do równoliczności pojęć, w której szczególne miejsce zajmuje operator „jest liczbą”. Okres, w którym pracował nad tym rozwiązaniem, jest traktowany jako szczytowy w rozwoju myśli Fregego; wszystko, co było przed tym – było okresem przygotowawczym, a wszystko, co potem – okresem schyłkowym. W tym tekście skupię się na wyróżnieniu sześciu ważnych, kluczowych wypowiedzi dotyczących liczby. Mój artykuł rozpocznę od informacji na temat powodów zainteresowania się tym tematem przez Fregego, a zakończę refleksją na temat roli historii matematyki w uprawianiu filozofii. Frege uważał, że badanie liczby jest zadaniem wspólnym filozofom i matematykom. Tu pierwszoplanowo traktuję aspekt filozoficzny.

[1] G. Frege, *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, Hamburg 1986, s. 6 (*Podstawy arytmetyki. Logiczno-matematyczne badania nad pojęciem liczby*, [w:] F. Brentano, G. Frege, Ch. Thiel, *Próby gramatyki filozoficznej. Antologia*, tłum. i oprac. K. Rotter, Wrocław 1997, s. 89).

Geneza zainteresowania się liczbą jako liczbą

Pytanie o liczbę było pierwszym filozoficznym pytaniem Fregego i okazało się centralnym dla jego filozofii. Wszystko, czego dokonał w filozofii, logice i semantyce, było konsekwencją badania liczby. Za upokarzający uważał brak jasności co do podstawowego przedmiotu zainteresowań matematyki, jakim jest liczba. Jak pisał: przejrzystość podstaw to potrzeba rozumu (*Vernunft*)[2]. Pojęcie liczby uważał za szczególne. Wydaje się, że można wskazać na dwie inspiracje badań Fregego nad liczbą: niezadowolenie z poziomu literatury matematycznej (w tym podręczników) w jego czasach oraz niezadowolenie z charakteru własnych prac awansowych, doktorskiej i habilitacyjnej[3]. Bezpośrednią inspiracją do badania podstaw arytmetyki mogły być dla Fregego niedostatki dostrzeżone w książce Heinricha Seegera pt. *Die Elemente der Arithmetik, für den Schulunterricht bearbeitet* (1874), której recenzję Frege opublikował w 1874 roku[4]. Dotyczyły one mało zrozumiałego dla uczniów sposobu określenia niektórych pojęć matematycznych (np. liczb ujemnych) oraz związanych z nimi praw. Zauważone

[2] Tamże, s. 17 (s. 98).

[3] Tenże, *Rechnungsmethoden, die sich auf eine Erweiterung des Grössenbegriffes gründen. Dissertation zur Erlangung der Venia Docendi bei der Philosophischen Fakultät in Jena*, Jena 1874, [w:] *Kleine Schriften*, Darmstadt 1967, s. 50–84.

[4] Tenże, [rec.] H. Seeger, *Die Elemente der Arithmetik, für den Schulunterricht bearbeitet*, „Jenaer Literaturzeitung" 1874, Bd. 1, s. 722, [w:] *Kleine Schriften*, Hamburg 1983, s. 85–86.

braki mogły być jednym z bodźców do zajęcia się fundamentalnymi kategoriami arytmetyki oraz źródłem programu logicyzmu[5]. Do realizacji tych zadań Frege przygotowywał się już od swej pierwszej książki, *Begriffsschrift* (1879)[6], poświęconej opracowaniu pewnego języka logicznego (zwanego pismem pojęciowym), wypunktowaniu aksjomatów i pokazaniu zastosowania tego języka do charakterystyki szeregu (*Reihe*). Badanie między innymi tych zagadnień doprowadziło go do głównego zadania jego pracy naukowej: jak zdefiniować liczbę za pomocą pojęć logicznych.

Uporządkowanie ważnych sformułowań dotyczących liczby

W tym artykule zarysowuję drogę, jaką przebył Frege, począwszy od niedostatków zauważonych w określaniu liczby na użytek matematyki i wczesnych prac, poprzez kolejne próby zaradzenia tym zauważonym brakom w matematyce aż do tekstów pisanych na krótko przed śmiercią. Publikował w formie książek lub artykułów, choć pozostawił także teksty niepublikowane,

[5] Zob. T.W. Bynum, *On the Life and Work of Gottlob Frege*, [w:] *Conceptual Notation and Related Articles*, tłum. i oprac. T.W. Bynum, Oxford 1972, s. 9.

[6] G. Frege, *Begriffsschrift und andere Aufsätze*, Zürich–New York 1998 (*Ideografia. Język formalny czystego myślenia wzorowany na języku arytmetyki* [*Przedmowa*, §§ 1–13], [w:] F. Brentano, G. Frege, Ch. Thiel, *Próby gramatyki filozoficznej*..., dz. cyt., s. 45–85).

ale przygotowane do druku, oraz teksty, których nie przygotował do publikacji. Snuł ponadto listowne dyskusje z matematykami i filozofami pracującymi nad podobnymi zagadnieniami w jego czasach. Niektóre z tych materiałów nie przetrwały drugiej wojny światowej.

Intensywne badania, jakie prowadził Frege, zaowocowały trzema książkami (w tym jedną wydaną w dwóch tomach) i licznymi artykułami[7]. Analizując ich treść, wyodrębniłam sześć ważnych sformułowań dotyczących określenia liczby, mimo że zazwyczaj przywołuje się jedno, odwołujące się do równoliczności pojęć. W literaturze jest najczęściej w ogóle pomijany pomysł łączenia liczby z geometrią, którego Frege nie zdążył już opracować. Uważam, że wszystkie omawiane przeze mnie sformułowania były dla Fregego kolejnymi etapami w szukaniu możliwości uściślenia podstaw arytmetyki

[7] Oto wszystkie pozycje Fregego traktujące bezpośrednio o liczbie. Zastosowano następujące skróty: opublikowane (O), niepublikowane za życia Fregego, ale przygotowane przez niego do druku (NP), niepublikowane i nieprzygotowane do druku (NN). Pełna informacja bibliograficzna znajduje się na końcu artykułu. *Begriffsschrift und andere Aufsätze* (1879), *Die Grundlagen der Arithmetik* (1884), *Über Begriff der Zahl* (1891–1892) – NN, *Über Begriff und Gegenstand* (1892) – O, *Grundgesetze der Arithmetik*, Bd. 1 (1893) – O, *Über der Zahlen des Herrn H. Schubert* (1899) – O, *Grundgesetze der Arithmetik*, Bd. 2 (1903) – O, *Nachwort* (1903), *Tagebucheintragungen über Begriff der Zahl* – NN, *Zahl* (1924) – NN, *Erkenntnisquellen der Mathematik und der mathematischen Naturwissenschaften* (1924–1925) – NP, *Zahlen und Arithmetik* (1924) – NN, *Neuer Versuch der Grundlegung der Arithmetik* (1924/1925). Ten spis można byłoby uzupełnić listami, które traktowały o tej problematyce.

liczb naturalnych. Pierwszych pięć zarazem określało zręby logicyzmu Fregego (jako stanowiska co do podstaw arytmetyki), przyjmującego, że wszystkie jej główne pojęcia i operacje mogą być zdefiniowane na podstawie pojęć i operacji logicznych. Uważam, że pokazując rozwój poglądów autora, warto zatrzymać się także na tych stopniach jego drogi, które, chociaż mało znane, prowadziły go jednak do przodu. Z tego względu, że najważniejszym momentem w badaniu liczby, jakie prowadził Frege, okazało się znalezienie antynomii w systemie logicznym, w którym była wyrażona jedna z koncepcji liczby, kluczowe sformułowania dotyczące liczby porządkuję następująco:

Okres przed znalezieniem antynomii

1) liczba określana jako funkcja konstytuująca szereg (*Begriffsschrift* i *Anwendungen der Begriffsschrift*, 1879);
2) liczba określana indukcyjnie i zarazem przez relację podpadania pod pojęcie (*Die Grundlagen der Arithmetik*, 1884);
3) liczba określana przez relację równoliczności pojęć, wyrażoną za pomocą słów, a nie symbolicznie (*Die Grundlagen der Arithmetik*, 1884);
4) liczba określana przez relację równoliczności pojęć, ale wyrażoną za pomocą pisma pojęciowego (*Grundgesetze der Arithmetik*, Bd. 1, 1893; Bd. 2, 1903);

Okres po znalezieniu antynomii

5) liczba określana przez relację równoliczności wraz z próbami ominięcia antynomii (*Nachwort*, [w:] *Grundgesetze der Arithmetik*, Bd. 2, 1903, s. 253–265);
6) liczba określana przez oparcie arytmetyki liczb naturalnych nie na logice, ale na geometrii (*Neuer Versuch der Grundlegung der Arithmetik*, 1924/1925).

Podane przez Fregego określenie liczby umożliwiało określenie poszczególnych liczb: 0, 1, 2 itd. W określeniach 1, 4 i 5 kluczową rolę odgrywał zapis za pomocą Fregego pisma pojęć. Z tego względu, że celem mojego artykułu nie jest prezentacja języka logiki Fregego (temat zbyt obszerny), te sformułowania podam tylko w języku naturalnym.

Liczba określana jako funkcja konstytuująca szereg

W 1879 roku Frege opublikował *Begriffsschrift*, w którym sformułował syntaktykę i semantykę dla rachunku zdań oraz rachunku predykatów pierwszego i drugiego stopnia. Posługując się takimi narzędziami, zdefiniował pojęcie szeregu (za pomocą funkcji konstytuującej szereg) i następnika w szeregu oraz relację następowania. W dalszej kolejności w *Anwendungen der Begriffsschrif* (1879) określił dodatnią liczbę całkowitą indukcyjnie jako funkcję konstytuującą szereg, przy czym posłużył się następującymi terminami pierwotnymi: liczba, następstwo, 0 i 1. Oto parafraza logicznego zapisu Fregego: „a jest dodatnią liczbą całkowitą, jeżeli należy do szeregu zaczynającego się od 0 i konstytuowanego przez powiększanie o 1[8]".

Na tym sformułowaniu Frege nie poprzestał, lecz prowadził swe badania dalej, co spowodowane było między innymi tym, że więcej obiektów da się policzyć (zindywidualizowane, materialne, niematerialne, następujące po sobie w czasie), niż ustawić w szereg, a więc powyższe określenie liczby radykalnie ogranicza jej zastosowanie.

Liczba określana indukcyjnie i zarazem przez relację podpadania pod pojęcie

Pierwsze określenie liczby, związane z *Begriffsschrift*, było dokonane za pomocą narzędzi logicznych i wyrażone w języku symbolicznym. Ze względu jednak na to, że język logiczny, jakim posługiwał się Frege, odstraszał wielu potencjalnych czytelników, postanowił z niego zrezygnować na rzecz języka naturalnego. Uważał, że tym sposobem rozszerzy zakres oddziaływania swej koncepcji. Następny etap poszukiwania precyzyjnego określenia, czym jest liczba, znalazł wyraz w początkowych paragrafach *Die Grundlagen der Arithmetik* (1884). Tam

[8] Zob. G. Frege, *Anwendungen der Begriffsschrift*, „Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft" 1879, nr 13, [w:] *Begriffsschrift…*, dz. cyt., s. 90.

indukcyjne określenie liczby zostało istotnie zmodyfikowane przez zastosowanie (niestosowanej wcześniej) relacji podpadania obiektu pod pojęcie. Ten drugi istotny sposób określenia liczby można byłoby nazwać przejściowym z tego względu, że z jednej strony autor odwołuje się do (tak typowego dla definicji indukcyjnej) następnika, a z drugiej pojawia się element, który już wkrótce okaże się kluczowy przy definiowaniu opartym na równoliczności: relacja podpadania pod pojęcie. Nim przejdę do przedstawienia określenia przejściowego, odnotuję parę informacji o ważnym odróżnieniu *Zahl* od *Anzahl* wprowadzonym w *Die Grundlagen der Arithmetik*, a więc w dojrzałym okresie badań nad liczbą. Trudno wskazać drogę, która doprowadziła go do konieczności przyjęcia takiego rozwiązania. Poniżej przedstawię czytelnikowi, jak rozumiał on te dwa słowa, bliskoznaczne w potocznym języku niemieckim. Frege pisał:

> [...] liczba [Zahl – przyp. G.B.], którą zajmuje się arytmetyka, musi być traktowana nie jako niesamodzielny atrybut, lecz rzeczownikowo (różnica ta odpowiada różnicy między „błękitny" a „kolor nieba"). Liczba [Zahl – przyp. G.B.] jawi się więc jako rozpoznawalny przedmiot, chociaż nie fizyczny ani nawet przestrzenny, czy taki, który moglibyśmy sobie jakoś wyobrazić[9].
>
> Liczby zachowują się […] całkiem inaczej niż indywidua jakiegoś gatunku zwierząt, gdyż są w określony sposób uszerego-

[9] Tenże, *Die Grundlagen der Arithmetik…*, dz. cyt., § 106, s. 105 (*O pojęciu liczby...*, dz. cyt., s. 201).

> wane przez naturę, a każda utworzona jest w jej tylko właściwy sposób i ma swoją odrębność, która daje o sobie znać szczególnie wyraźnie w przypadku 0, 1 i 2[10].

Zahl to obiekt idealny, jedna z poszczególnych liczb, na przykład 3, 4 itd.[11] *Anzahl* jest liczebnością zbioru (dziś powiemy: mocą zbioru, liczbą kardynalną) i daje odpowiedź na pytanie, ile jest obiektów pewnego rodzaju. *Anzahl* jest predykatem drugiego rzędu, orzekanym o pojęciach pierwszego rzędu; było odnoszone albo do zakresu pojęcia, albo do ogólnego pojęcia liczby. Z kolei liczebniki są pomyślane jako nazwy własne liczb-obiektów, nie jako predykaty.

Frege uważał, że pytanie o liczbę jest zadaniem wspólnym dla matematyków i filozofów[12]. Wprowadzone rozróżnienie na *Zahl* i *Anzahl* pozwalało mu pokazać filozoficzną głębię zagadnienia, uzupełnioną potem opisem logicznym.

Przejściowe określenie liczby brzmi następująco:

> Pojęciu F przysługuje liczba [Zahl – przyp. G.B.] (n + 1), gdy istnieje taki przedmiot a podpadający pod F, że pojęciu „podpadający pod F, lecz nie a" przysługuje liczba [Zahl – przyp. G.B.] n[13].

[10] Tamże, § 10, s. 24 (*Podstawy arytmetyki*..., dz. cyt., s. 105).
[11] Tamże, § 18, s. 32 (s. 113).
[12] Tamże, s. 6 (s. 89).
[13] Tamże, § 55, s. 66 (*O pojęciu liczby*..., dz. cyt., s. 177). Wydaje się, że Frege powinien użyć tu słowa *Anzahl*, które od początku książki jest łączone z pojęciem. Z drugiej jednak strony wcześniej pisał, iż liczby pojęte jako nieprzestrzenne i nieczasowe przedmioty tworzą

Jako narzędzia użyto tu relacji podpadania pod pojęcie, relacji przysługiwania i funktora negacji. W domyśle przyjęto, że obiekty mogą podpadać pod pojęcia własność pojęcia w tradycyjnym rozumieniu) oraz możliwość określenia zakresu pojęcia (przy tradycyjnym rozumieniu pojęcia).

Mając takie narzędzie, Frege następująco określał zero: „[...] pojęciu przysługuje liczba 0, gdy dla każdego a jest prawdą, że a pod to pojęcie nie podpada”[14].

W podobny sposób została określona liczba jeden:

> [...] pojęciu F przysługuje liczba 1, gdy nie dla każdego a jest prawdą, że a nie podpada pod F, i gdy ze zdań „a podpada pod F” i „b podpada pod F” wynika, że a jest tym samym co b[15].

Podstawową zaletą tej strategii było to, że pozwalała osiągnąć liczbę „własnymi siłami również wówczas, gdy nie mamy jej oglądu”[16]. Dzięki takiej metodzie liczbę 437 986 można zdefiniować na podstawie odwołania do jej poprzednika i powiększenia o 1, chociaż nie mamy jej oglądu[17]. Mimo wszystko Frege nie był jednak zadowolony z powyższego rozwiązania i poda-

---

szereg, a „pozycje w szeregu liczbowym nie są równoważne (*gleichwertig*) jak miejsca w przestrzeni”. Tamże, § 10, s. 24 (*Podstawy arytmetyki*…, dz. cyt., s. 105).

[14] Tamże.

[15] Tamże.

[16] Tamże, § 6, s. 18 (*Podstawy arytmetyki*..., dz. cyt., s. 99).

[17] Tamże.

nych określeń zera i jedynki[18], a to niezadowolenie warunkowało jego dalsze badania.

Liczba określana w odwołaniu do równoliczności pojęć, wyrażona bez użycia symbolizmu logicznego

Zasygnalizowane powyżej braki spowodowały dalsze poszukiwania. Zasadniczym celem *Die Grundlagen der Arithmetik* było określenie liczby w odwołaniu do równoliczności zakresów dwóch pojęć i zastosowanie tak zwanej zasady Hume'a, którą Frege znał z tekstu Hume'a, zacytowanego przez Petera Baumanna w drugim tomie z 1869 roku:

> Jeżeli dwie liczby są takie, że jedna z nich zawiera jednostkę, która odpowiada każdej jednostce drugiej, to twierdzimy, że są one równe[19].

Przy tym sformułowaniu liczby bardzo ważne okazało się wcześniej sygnalizowane rozróżnienie na *Zahl* i *Anzahl*, co przypomnę jeszcze jednym cytatem:

[18] Więcej na ten temat zob. G. Besler, *Gottloba Fregego koncepcja analizy filozoficznej*, Katowice 2010, s. 170.
[19] G. Frege, *Die Grundlagen der Arithmetik*..., dz. cyt., § 63, s. 71 (*O pojęciu liczby*..., dz. cyt., s. 181).

> Jeśli równie dobrze mogę nazwać przedmiot zielonym i czerwonym, jest to oznaką tego, że przedmiot ten nie jest właściwym nośnikiem zieleni. [...] Podobnie przedmiot, któremu równie dobrze mogę przypisać różne liczby [Zahl – przyp. G.B.], nie jest właściwym nośnikiem liczby [Zahl – przyp. G.B.][20].

A zatem liczba (*Zahl*) jest przedmiotem (idealnym). Ten wątek filozofii Fregego wzbudzał wiele emocji. Przywołam tu następujące sformułowanie Michaela Dummetta, ważnego komentatora pism Fregego, który przekonanie co do istnienia przedmiotów matematycznych porównywał do wiary w Boga: wierzy się lub nie[21] i na tym możliwość racjonalnego dyskursu by się kończyła.

Ważne jest także, by dookreślić, jak Frege rozumiał pojęcie. Wprawdzie przyrównał pojęcie do funkcji wyraźnie dopiero w artykule *Funkcja i pojęcie* z 1891 roku, czyli siedem lat po wydaniu *Die Grundlagen der Arithmetik*, wydaje się jednak, że już w 1884 roku pojęcie było rozumiane na wzór funkcji jednoargumentowej (*einfacher Begriff*) lub dwuargumentowej (*Beziehungsbegriff*)[22]. Tym sposobem z pojęciem nie łączyła się konkretna treść (w zasadzie nigdy pojęcia nie łączono z konkretną treścią, zawsze pojęcie miało naturę ogólną) i miało ono „jedynie

---

20 Tamże, § 22, s. 35 (*Podstawy arytmetyki*..., dz. cyt., s. 116).

21 M. Dummett, *Frege: Philosophy of Mathematics*, London 1995, s. 307.

22 G. Frege, *Die Grundlagen der Arithmetik*…, dz. cyt., § 70, s. 78 n. (*O pojęciu liczby*…, dz. cyt., s. 186).

formę logiczną"[23]. To nowe rozumienie pojęcia było szczególnie istotne przy omawianym tu określeniu liczby, w odwołaniu się do równoliczności zakresów pojęć.

Poniższy fragment jest trzecim, najpełniejszym określeniem liczby:

> Liczba [*Anzahl* – przyp. G.B.] przysługująca pojęciu F jest to zakres pojęcia „pojęcie równoliczne z pojęciem F", przy czym pojęcie F nazywamy równolicznym z pojęciem G, jeżeli istnieje możliwość wzajemnie jednoznacznego przyporządkowania [przedmiotów podpadających pod pojęcie F przedmiotom podpadającym pod pojęcie G – przyp. G.B.][24].

W definicji tej wyraźnie zaznaczono, że liczebność (*Anzahl*) jest predykatem drugiego stopnia, orzekanym o dwóch pojęciach pierwszego stopnia, których zakresy są równoliczne[25]. Tak określona liczebność była punktem kluczowym logicyzmu Fregego. Celem badawczym *Die Grundlagen der Arithmetik* było zdefiniowanie albo uznanie za niedefiniowalne *Anzahl*[26].

23 Tamże, § 70, s. 79 (*O pojęciu liczby…*, dz. cyt., s. 187). Por. G. Frege, *Funktion und Begriff*, [w:] *Kleine Schriften…*, dz. cyt., s. 125–142 (*Funkcja i pojęcie…*, dz. cyt., s. 18–44).

24 Tenże, *Grundlagen der Arithmetik…*, dz. cyt., § 107, s. 106 (*O pojęciu liczby...*, dz. cyt., s. 202).

25 Otwartym problemem pozostaje ontologiczna relacja pomiędzy *Zahl* (obiekt idealny) i *Anzahl* (pojęcie drugiego stopnia). Frege nie podejmował tego problemu.

26 Tamże, § 4, s. 16 (*Podstawy arytmetyki…*, dz. cyt., s. 97).

Po zdefiniowaniu liczby jako *Anzahl* Frege definiował poszczególne liczby: 0, 1, itd. Użyte tu pojęcia pierwotne to zakres, pojęcie, a narzędziami są: relacja jedno-jednoznacznego przyporządkowania, odnoszenie się pojęcia do obiektu[27].

Słabą stroną omawianego tu określenia liczby było jedynie to, że zostało ono sformułowane w języku naturalnym, a nie precyzyjnym języku logiki, dokładniej: Fregego piśmie pojęciowym, przedstawionym w pierwszej książce, *Begriffsschrift…* (rozbudowanym *w Grundgesetze der Arithmetik*). Ten brak Frege uzupełnił parę lat później, publikując pierwszy tom wspomnianych *Grundgesetze der Arithmetik*.

Liczba określana w odwołaniu do relacji równoliczności pojęć i wyrażana za pomocą symbolizmu logicznego

Następnym etapem rozwoju była budowa systemu logicznego (w języku Fregego: posłużenie się „pismem pojęć"), z określonymi aksjomatami, regułami i definicjami terminów pierwotnych, w którym definiowane były: liczba naturalna, zero, jedynka, następnik w ciągu, inne liczby naturalne. Z takim zamysłem powstały dwa tomy *Grundgesetze der Arithmetik*[28],

[27] Więcej zob. G. Besler, *Gottloba Fregego koncepcja*…, dz. cyt., s. 163–189.
[28] G. Frege, *Grundgesetze der Arithmetik. Begriffsschriftlich abgeleitet. Band 1 und 2. In moderne Formelnotation transkribiert und mit*

istotnie rozbudowujące pomysły z 1884 roku. Dla przykładu, Frege wprowadził oznaczenie na *Anzahl*: skośną kreskę przebiegającą zapisaną cyfrę z lewej strony do prawej. Ponownie podkreślał rozróżnianie między poszczególnymi liczbami (*Zahl*) 3, 4 itd., a ogólnym pojęciem liczebności (*Anzahl*). W konsekwencji liczba (*Zahl*) 1 różni się więc od liczebności (*Anzahl*) 1[29]. W drugim tomie *Anzahl* jest określana jako odpowiedź na pytanie, ile jest obiektów pewnego rodzaju[30]. W *Grundgesetze der Arithmetik* zamiast o równoliczności pojęć jest mowa o identyczności zakresów wartości funkcji. Tym sposobem wydawało się, że liczba będzie określona z nieznaną dotąd precyzją.

Można powiedzieć, że w omawianej pozycji jest określany operator „jest liczbą". Należy dodać, że u Fregego używanie operatorów wiązało się z jego fundamentalnym rozróżnieniem ontologicznym, mianowicie odróżnieniem przedmiotów (rozumianych na wzór argumentów dla funkcji) od pojęć (rozumianych na wzór funkcji)[31]. Rolą operatora było przekształcenie zapisu funkcji, czyli formuły funkcyjnej, w nazwę odpowiedniego rodzaju przedmiotu, rodzaj przedmiotu zależał zaś od rodzaju

einem ausführlichen Sachregister versehen von Thomas Müller, Bernhard Schröder und Rainer Stuhlmann-Laeisz, Paderborn 2009 (Bd. 1 Aufl. 1, Jena 1893; Bd. 2 Aufl. 1, Jena 1903).

[29] Tamże, Bd. 1, § 41, s. 75.

[30] Tamże, Bd. 2, § 157, s. 452.

[31] To rozróżnienie zostało wprowadzone w 1891 roku w artykule *Funktion und Begriff*…, dz. cyt., s. 22–31. W *Grundgesetze der Arithmetik* Frege także się nim posługuje (zob. np. G. Frege, *Grundgesetze der Arithmetik*…, dz. cyt., Bd. 1, § 2, s. 29).

użytego w danym przypadku operatora. Przyjęcie takiego rozwiązania było konieczne dla Fregego, bo funkcje, jako elementy niezupełne, nie były przedmiotami i nie można było napisać: $f = g$. Przebieg wartości funkcji był natomiast czymś zupełnym w sobie (a więc przedmiotem) i przebiegi dwóch funkcji mogły być sobie równe. Uważał, że w ten sposób podał kryterium identyczności zakresów dwóch pojęć: pojęcia będą miały identyczne zakresy wtedy, gdy w ich zakresach będą te same przedmioty. W *Grundgesetze*... występują dwa ważne operatory:

1) operator abstrakcji (operator na oznaczenie przebiegu wartości funkcji) – symbol: samogłoska alfabetu greckiego z przydechem;
2) operator deskrypcji (operator zastępowania zaimka określonego) – tworzy z funkcji propozycjonalnej nazwę jedynego przedmiotu spełniającego tę funkcję.

Określenie liczby, jakie pojawiło się w *Grundgesetze*..., jest istotnie związane z tzw. piątym aksjomatem, który mówi o równoliczności zbiorów, co można przedstawić tak: dwie funkcje mają identyczne przebiegi swych wartości wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego argumentu przyjmują tę samą wartość[32]. We wprowadzeniu do tej książki Frege tak ujął swój nowy sposób określenia liczby: „*Liczbę [Anzahl] wyjaśniłem stosunkiem równoliczności, a ten przyporządkowaniem jednoznacznym*”[33].

[32] Tamże, Bd. 1, § 47, s. 79.
[33] Tamże, Bd. 1, s. 26.

Jako przykład pojęć posiadających ten sam zakres można podać trójbok i trójkąt, a wtedy aksjomat piąty brzmiałby następująco: funkcja f – ilość kątów w (pewnym) trójboku – jest identyczna z funkcją g – ilością kątów w (pewnym) trójboku, gdy zakres wartości funkcji f jest identyczny z zakresem wartości funkcji g. Ogół przedmiotów spełniających funkcję f jest identyczny z ogółem przedmiotów spełniających funkcję g, w obu przypadkach jest to liczba 3. A zatem zbiory wartości dwóch funkcji: funkcji f – ilość kątów w (pewnym) trójboku, oraz funkcji g – ilość kątów w (pewnym) trójboku, są sobie równe. W tym sensie aksjomat piąty stanowi użyteczną „strukturę" przy określaniu poszczególnych liczb naturalnych. *Grundgesetze*... to interesująca pozycja dla badaczy filozoficznego zaplecza Fregego.

Liczba określana w odwołaniu do relacji równoliczności pojęć wraz z próbami uniknięcia antynomii

Wyżej przedstawione ujęcie liczby Frege przyjmował do czasu, gdy w 1903 roku otrzymał list od Bertranda Russella, w którym została przedstawiona możliwość zbudowania antynomii (podobnej do antynomii Russella, o klasie wszystkich klas, która nie jest swoim własnym elementem) na podstawie charakterystyki funkcji, jaką Frege przedstawił w swej pierwszej książce, *Begriffsschrift*[34]. Opierając się na niej, Frege zauważył, że antynomię można zbudować także na podstawie aksjomatu systemu przedstawionego w pierwszym tomie *Grundgesetze der Arithmetik*, opublikowanym dziesięć lat wcześniej, którego drugi tom był w 1903 roku akurat drukowany. Antynomia była generowana między innymi ze względu na brak określonej dziedziny funkcji. By zaradzić powstałej sytuacji, Frege poprzedził aksjomat piąty ograniczeniem tej dziedziny: funkcja nie może być swoim własnym elementem (funkcja nie może należeć do swej dziedziny). Tym sposobem powstało kolejne ważne sformułowanie równolicznościowego określenia liczby, przedstawione w *Nachwort*, dodatku do *Grundgesetze der Arithmetik*[35]. Warto dodać, że na tym etapie Frege uważał, iż określenie liczby przez odwołanie się do równoliczności pojęć jest nadal aktualne, a liczby (*Zahl*) powinny być rozumiane jako idealne obiekty logiczne.

---

[34] Zob. B. Russell, *List do G. Fregego*, [w:] *Filozofia matematyki…*, dz. cyt., s. 221–222; G. Frege, *List do B. Russella*, [w:] tamże, s. 203–204.

[35] G. Frege, *Nachwort*, [w:] *Grundgesetze der Arithmetik…*, dz. cyt., Bd. 2, s. 549–563.

Liczba określana w odwołaniu do geometrii

W ostatnim, emerytalnym okresie swego życia Frege podjął kolejną, nową i oryginalną próbę ugruntowania arytmetyki liczb naturalnych na podstawie geometrii[36]. Ten projekt nowego rozumienia natury arytmetyki i liczby nie został już jednak dopracowany, niemniej jednak wart jest opisu i usystematyzowania. W literaturze jest raczej pomijany.

Ostatnią próbę określenia liczby najlepiej charakteryzuje następująca wypowiedź Fregego:

> Musiałem porzucić mniemanie, że arytmetyka jest gałęzią logiki i że stosownie do tego wszystko w arytmetyce musi być dowiedzione w sposób czysto logiczny. Po drugie, musiałem porzucić mniemanie, że arytmetyka nie potrzebuje przejmować od intuicji żadnej podstawy uzasadnienia[37].

[36] To ujęcie liczby jest przedstawione w czterech dokumentach, z których tylko jeden był przez Fregego przygotowywany do druku: *Tagebucheintragungen über Begriff der Zahl* – NN, *Zahl* (1924) – NN, *Erkenntnisquellen der Mathematik und der mathematischen Naturwissenschaften* (1924–1925) – NP, *Zahlen und Arithmetik* (1924) – NN, *Neuer Versuch der Grundlegung der Arithmetik* (1924/1925). Ta tematyka nie pojawia się w korespondencji Fregego z tego okresu.

[37] G. Frege, *Neuer Versuch der Grundlagen der Arithmetik*..., dz. cyt., s. 298–302. Podaję za: I. Dąmbska, *Idee kantowskie w filozofii matematyki XX wieku*, „Archiwum Historii Filozofii i Myśli Społecznej" 1978, t. 24, s. 196.

Dramatyczność przytoczonego wyznania uwidacznia się w konfrontacji z przekonaniem, jakie filozof i logik z Jeny żywił jeszcze kilka lat wcześniej, w 1919 roku:

> [....] podanie liczby [Zahlangabe – przyp. G.B.] zawiera wypowiedź o pojęciu, zatem w języku logicznie doskonałym zdanie, które podaje liczbę, winno składać się z dwu części: ze znaku pojęcia, o którym liczebność [Zahlaussage – przyp. G.B.] jest orzekana, oraz ze znaku pewnego pojęcia drugiego stopnia[38].

O tym ostatnim stadium badań Fregego pisała Izydora Dąmbska:

> Droga, którą teraz obrał, ma charakter przede wszystkim epistemologiczny i [....] jest ona czymś w rodzaju, za przykładem Kanta przeprowadzonej, „Krytyki matematycznego i logicznego rozumu"[39].

Poniżej zbiorę tezy Fregego z nieopublikowanego za życia Fregego tekstu zatytułowanego *Neuer Versuch der Grundlegung der Arithmetik* (1924/1925)[40], gdzie nowe ujęcie liczby jest zaledwie zarysowane.

---

[38] G. Frege, *Aufzeichnungen für Ludwig Darmstaedter* [1919], [w:] *Nachgelassene Schriften*..., dz. cyt., s. 277 (*Szkic dla Darmstaedtera*, [w:] *Pisma semantyczne*..., dz. cyt., s. 139).

[39] I. Dąmbska, *Idee kantowskie*..., dz. cyt., s. 195.

[40] G. Frege, *Neuer Versuch der Grundlegung*..., dz. cyt., s. 298–302.

Prezentację tego stanowiska rozpoczyna Frege od wątku epistemologicznego, pisząc, że źródłem poznania w arytmetyce i geometrii nie jest poznanie zmysłowe, ale pewna forma poznania *a priori*, nazywana przez niego geometrycznym źródłem poznania (*geometrische Erkenntnisquelle*), w której ma też udział logiczne źródło poznania (*logische Erkenntnisquelle*)[41]. Geometryczne źródło poznania jest w najmniejszym stopniu narażone na zanieczyszczenia i za jego pośrednictwem są poznawane aksjomaty (w rozumieniu Euklidesa, a nie Hilberta) geometrii[42]. Jako przykład niemożliwości oparcia się w matematyce na poznaniu zmysłowym podaje niemożliwość zmysłowego poznania tego, że liczb całkowitych jest nieskończona ilość[43].

Wyrażenie zdania jest odróżnione od samej myśli, a myśl może być wyrażona przez różne zdania[44]. Frege wypowiadał się także na temat rozwoju percepcji liczby w rozwoju umysłowym człowieka i pisał o liczbach kształtowanych (przez rodziców i nauczycieli) w umysłach dzieci, nazywając je *Kleinkinder-Zahlen*[45]. Liczba ciągle jest rozumiana jako przedmiot (*Gegenstand*, *Ding*), ale nie natury fizycznej[46]. W tym okresie Frege ciągle wiąże badanie natury liczby z badaniami języko-

41 Tenże, *Erkenntnisquellen der Mathematik…*, dz. cyt., s. 287.
42 Tamże, s. 292; tenże, *Neuer Versuch der Grundlegung…*, dz. cyt., s. 298.
43 Tamże, s. 299.
44 Tenże, *Erkenntnisquellen der Mathematik…*, dz. cyt., s. 288.
45 Tenże, *Zahlen und Arithmetik* (1924), s. 296 n.
46 Tenże, *Tagebucheintragungen über Begriff…*, dz. cyt., s. 282 n.; tenże, *Über Begriff der Zahl*, dz. cyt., s. 282 n.; tenże, *Neuer Versuch der Grundlegung…*, dz. cyt., s. 299; tenże, *Zahl*, s. 284–285.

wymi, w szczególności struktury zdania będącego wypowiedzią o liczbie, a liczbę odróżnia od cyfry (*Zahlzeichen*)[47].

Oto sformułowanie Fregego pokazujące nowy sposób określenia liczby:

> Ta liczba, która w ten sposób określa wielkość pewnego kąta, jest tą liczbą, którą się otrzymało, kiedy łuk [o środku w punkcie K – przyp. G.B.] wycięty przez swoje ramiona mierzy się promieniem z punktu K [dzieli się przez promień z punktu K – przyp. G.B.]. Tu w każdym przypadku jest ustalone, jaką liczbę ma się na uwadze, kiedy dany znak „sinus" jest dopełniony przez pewną liczbę rzeczywistą. Zakłada się jedynie, że wiadomo, w jaki sposób kąt jest powiązany z swoim sinusem[48].

Tak określona liczba łatwo pozwala Fregemu przedstawić poszczególne liczby. Dla przykładu, liczba 1 to przypadek, w którym długość łuku i długość ramienia są sobie równe, a liczba 2, czyli łuk jest dwa razy dłuższy niż promień[49]. Łatwo skonstruować także liczbę 0 (czego Frege już nie zrobił): to przypadek, w którym długość łuku wynosi 0 niezależnie od długości promienia. Gdyby uwzględnić kierunek mierzenia łuku, mamy sposób określenia także liczb ujemnych. W konsekwencji można otrzymać więc wszystkie liczby rzeczywiste!

---

[47] Tenże, *Tagebucheintragungen über Begriff…*, dz. cyt., s. 282–283; tenże, *Über Begriff der Zahl*, dz. cyt., s. 282.
[48] Tenże, *Erkenntnisquellen der Mathematik…*, dz. cyt., s. 291 (tłumaczenie własne).
[49] Tamże.

Gdzie jest potrzebna historia matematyki?

Aby więc zrozumieć niektóre prądy filozofii współczesnej, trzeba sięgnąć do ich matematycznych korzeni, a to już historia matematyki. Omawiane tu zmagania Fregego z precyzyjnym określeniem liczby to przykład pokazujący, że historia matematyki jest potrzebna w profesjonalnym uprawianiu filozofii, i to nie tylko w historii filozofii, ale także w filozofii uprawianej systematycznie. W swym ostatnim okresie twórczości naukowej Frege wypowiedział zdanie, pod którym do dziś wielu się podpisze:

> Filozof, który nie ma nic wspólnego z geometrią, jest tylko do połowy filozofem, a matematyk, który nie ma w sobie żadnej żyłki filozoficznej, jest tylko do połowy matematykiem. Te dwie nauki oddzieliły się od siebie ze szkodą dla obydwu[50].

Powyższy cytat jest zarazem głosem za istotowym powiązaniem filozofii z matematyką, a w konsekwencji historii filozofii z historią matematyki. Wielu matematyków było zarazem wielkimi filozofami, począwszy od starożytnych pitagorejczyków, a skończywszy na XX wieku. Prócz Gottloba Fregego warto wspomnieć takie postaci, jak: Platon, Descartes, Leibniz, Bernard Bolzano, Edmund Husserl, Bertrand Russell. Ponadto od zawsze wielkim tematem filozoficznym była liczba: jej defi-

[50] Tamże, s. 293 (tłumaczenie własne).

nicja, sposób istnienia i poznania, związki z innymi bytami. Historia matematyki dostarcza natomiast bogatej wiedzy na temat pojmowania tych zagadnień przez matematyków (niekoniecznie filozofujących). Co więcej, filozofia i matematyka wielokrotnie wzajemnie się inspirowały, co można przenieść na grunt historii obu dziedzin. Matematyka (w tym jej historia) inspiruje filozofów różnorako, także niefrasobliwym przechodzeniem nad problemami filozoficznymi oraz nieszukaniem odpowiedzi na narzucające się pytania, np. co do sposobu istnienia przedmiotów matematycznych. Nie można przecenić jej roli w badaniu kontekstu odkrycia wielkich tez filozoficznych. Dodam, że filozofia z matematyką ma wspólne dążenie do ścisłości i filozof chętnie sięga do ksiąg matematycznych, by szukać tam i uczyć się sposobów jej wyrażania. Dodatkowo historia matematyki może być interesującym źródłem badania sposobów metaprzedmiotowego określenia jej przedmiotu badania, przyjmowanej metody i podejmowanych zadań. Historia matematyki jest kopalnią wiedzy na powyższe tematy i na temat historii zmagania się wielkich umysłów z tymi zagadnieniami. Wiele problemów z pogranicza historii matematyki i historii filozofii można przedstawić jako pasjonujące i na poły sensacyjne (w pozytywnym tego słowa znaczeniu) opowieści[51].

Filozofia ma nad matematyką (co najmniej) jedną niekwestionowaną przewagę: ugruntowaną refleksję nad sposobami

[51] Zob. J. Derbyshire, *Obsesja liczb pierwszych. Bernhard Riemann i największy nierozwiązany problem w matematyce*, tłum. R. Kirwiel, M. Kulas, Poznań 2009.

uprawiania historii filozofii i związanymi z tym problemami wymagającymi rozstrzygnięcia[52], czego matematyce raczej brakuje. Zastanawiając się nad rolą i koncepcją historii matematyki, a także inspirując się filozofią historii filozofii, można postawić parę pytań. Czy historyk matematyki ma obowiązek (a może prawo?) dokonać doskonalszego zapisu, niż to wynika z tekstu, jakim dysponuje? Wszak wielu słynnych historyków filozofii tak czyni. Czy historykowi matematyki wolno widzieć więcej niż matematykowi, którego dorobek opracowuje? Wiadomo, że niektóre idee są widziane dopiero przez następców. Na przykład Platon byłby zapewne zdziwiony tym, co dziś wyczytujemy z jego pism. Jak pisał Hegel: „Sowa Minerwy wylatuje o zmierzchu". Czy widzi się ciągłość w rozwoju matematyki, a jej dzieje są przedstawiane jako jedna całość, zaś zadaniem historyka jest zobaczyć jedność w jej rozwoju? Czy rozwój matematyki przedstawia się z uwzględnieniem tego, że tworzyli ją ludzie z „krwi i kości", żyjący w konkretnych uwarunkowaniach społecznych?[53] Czy na dzieje matematyki patrzy się z perspektywy swej własnej matematyki (w filozofii taka postawa jest nieuchronna)? Historia matematyki traktuje bardziej o problemach matematycznych czy też o osobach ją uprawiających? Czy historia matematyki pełni funkcję służebną w stosunku do

[52] Zob. M. Tyl, *Filozofia – historia – historia filozofii. Filozoficzne konteksty polskiej historiografii filozofii XX wieku*, Katowice 2012.

[53] Jako przykład takiego uprawiania historii filozofii podaję książkę R. Monka, *Ludwig Wittgenstein. Powinność geniusza*, Warszawa 2003.

matematyki? Czy pozycje z historii matematyki są spajane jedną ideą przewodnią? Czy zadaniem historii matematyki jest widzieć pewne prawa rozwoju? Mogłyby nam one odpowiedzieć na pytanie, jak uprawiać matematykę. Czy uprawianie historii matematyki jest receptą na kryzys w matematyce? W filozofii tak nieraz było. Czy można powiedzieć, że historia matematyki nie może być biernym rejestrowaniem przeszłości; wpierw powinna ustalić prawdę historyczną, a potem ją skorygować i nadać jej postać idealną? Czy historia matematyki to hermetyczny dyskurs karmiący się swą własną tradycją? Czy badając zagadnienia z zakresu historii matematyki, odkrywa się tematy nowe, wymagające opracowania matematycznego? Jako filozof, nie matematyk, zbyt słabo znam historię matematyki, by ustosunkować się do wyżej wymienionych zagadnień. Na koniec przywołam wypowiedź Stanisława Leśniewskiego z 1927 roku, napisaną po zapoznaniu się z pewną cytowaną już przeze mnie książką:

> Najbardziej imponującym wcieleniem zdobyczy, osiągniętych w dziejach uzasadniania matematyki w zakresie solidności metody dedukcyjnej, oraz najcenniejszym od czasów greckich źródłem tych zdobyczy są dla mnie dotąd Grundgesetze der Arithmetik Gottloba Fregego[54].

[54] S. Leśniewski, *O podstawach arytmetyki*, „Przegląd Filozoficzny" 1927, nr 30, s. 166.

Ta wypowiedź Leśniewskiego pokazuje jeszcze jeden doniosły cel poznawania historii uprawianej dziedziny: jej znajomość pozwala wartościować nowe prace.

Zakończenie

Frege za upokarzający uważał brak jasności co do podstawowego przedmiotu zainteresowań matematyki. To pilne zadanie traktował jako wspólne dla filozofów i matematyków. Opracowując swoje koncepcje liczby, jednocześnie krytycznie badał rozwiązania przyjmowane przez innych filozofów i matematyków. O wynikach swoich badań powiadamiał jemu współczesnych filozofów i matematyków, prowadził z nimi także dyskusje nad przyjętymi rozwiązaniami. Wydaje się, że wszystko w dorobku naukowym Fregego było podporządkowane poszukiwaniu lepszego ugruntowania matematyki, w tym określeniu, czym jest liczba. Na użytek tego zadania zostały m.in. sformułowane warunki poprawności definicji.

Chociaż Frege nie zmieniał swych poglądów radykalnie, to jednak w ciągu długiej aktywności naukowej ciągle szukał większej precyzji i ścisłości, przechodził z języka formalnego do języka potocznego (i odwrotnie), dokonywał autokrytyki, uwzględniał wyniki dyskusji z innymi uczonymi, rozbudowywał wczesne rozwiązania. Warto więc pokazać ten trudny proces szukania i tworzenia pewnych rozstrzygnięć bądź lepszych sformułowań, napotykania trudności, rozbudowywania swojego warsztatu pracy.

Bibliografia

Cytowane teksty Fregego

Anwendungen der Begriffsschrift, „Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft" 1879, Bd. 13, s. 29–33, [w:] *Begriffsschrift und andere Aufsätze*, Zürich–New York 1998.

Aufzeichnungen für Ludwig Darmstaedter [1919], [w:] *Nachgelassene Schriften*, Hamburg 1983, s. 277 (*Szkic dla Darmstaedtera*, [w:] *Pisma semantyczne*, tłum. B. Wolniewicz, Warszawa 1997).

Begriffsschrift und andere Aufsätze, Zürich–New York 1998. Wydanie polskie: *Ideografia. Język formalny czystego myślenia wzorowany na języku arytmetyki* (*Przedmowa*, §§ 1–13), [w:] F. Brentano, G. Frege, Ch. Thiel, *Próby gramatyki filozoficznej. Antologia*, tłum. i oprac. K. Rotter, Wrocław 1997).

Erkenntnisquellen der Mathematik und der mathematischen Naturwissenschaften (1924–1925), [w:] *Nachgelassene Schriften*, Hamburg 1983.

Grundgesetze der Arithmetik. Begriffsschriftlich abgeleitet. Band 1 und 2. In moderne Formelnotation transkribiert und mit einem ausführlichen Sachregister versehen von Thomas Müller, Bernhard Schröder und Rainer Stuhlmann-Laeisz, Paderborn 2009.

Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl, Hamburg 1986.

Fragmenty z „Grundlagen der Arithmetik" (1884) (fragm. *Wprowadzenia* i §§ 3, 53, 55–57, 60, 62, 106), [w:] G. Frege, *Pisma semantyczne*, tłum. B. Wolniewicz, Warszawa 1977.

O pojęciu liczby (fragm. *Wprowadzenia*, §§ 55–91, 106–109), [w:] *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, oprac. R. Murawski, Poznań 1986.

Podstawy arytmetyki. Logiczno-matematyczne badania nad pojęciem liczby (*Wprowadzenie*, §§ 1–28), [w:] F. Brentano, G. Frege, Ch. Thiel, *Próby gramatyki filozoficznej. Antologia*, tłum. i oprac. K. Rotter, Wrocław 1997.

Funktion und Begriff, Jena 1891, [w:] *Kleine Schriften*, Darmstadt 1967. Wydanie polskie: *Funkcja i pojęcie*, [w:] *Pisma semantyczne*, tłum. B. Wolniewicz, Warszawa 1977.

List do B. Russella, [w:] *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, oprac. R. Murawski, Poznań 1986.

Nachwort, [w:] *Grundgesetze der Arithmetik*, 1993.

Neuer Versuch der Grundlegung der Arithmetik (1924/1925), [w:] *Nachgelassene Schriften*. *Rechnungsmethoden, die sich auf eine Erweiterung des Grössenbegriffes gründen. Dissertation zur Erlangung der Venia Docendi bei der Philosophischen Fakultät in Jena*, Jena 1874, [w:] *Kleine Schriften*, Darmstadt 1967.

[rec.] Seeger H, *Die Elemente der Arithmetik, für den Schulunterricht bearbeitet*, „Jenaer Literaturzeitung" 1874, Bd. 1, s. 722, [w:] *Kleine Schriften*, Darmstadt 1967.

Tagebucheintragungen über Begriff der Zahl, [w:] *Nachgelassene Schriften*, Hamburg 1983.

Über Begriff der Zahl (1891–1892), [w:] *Nachgelassene Schriften*, Hamburg 1983.

Über der Zahlen des Herrn H. Schubert, Jena 1899, [w:] *Kleine Schriften*, Darmstadt 1967.

Zahl (1924), [w:] *Nachgelassene Schriften*, Hamburg 1983.

Zahlen und Arithmetik (1924), [w:] *Nachgelassene Schriften*, Hamburg 1983.

Wydania zbiorowe

Brentano F., Frege G., Thiel Ch., *Próby gramatyki filozoficznej. Antologia*, tłum. i oprac. K. Rotter, Wrocław 1997.

Conceptual Notation and Related Articles, tłum. i oprac. T.W. Bynum, Oxford 1972.

Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych, oprac. R. Murawski, Poznań 1986.

Kleine Schriften, Darmstadt 1967.

Nachgelassene Schriften, Hamburg 1983.

Pisma semantyczne, tłum. B. Wolniewicz, Warszawa 1977.

Pozostałe cytowane pozycje

Besler G., *Gottloba Fregego koncepcja analizy filozoficznej*, Katowice 2010.

Bynum T.W., *On the Life and Work of Gottlob Frege*, [w:] *Conceptual Notation and Related Articles*, tłum. i oprac. T.W. Bynum, Oxford 1972.

Dąmbska I., *Idee kantowskie w filozofii matematyki XX wieku*, „Archiwum Historii Filozofii i Myśli Społecznej” 1978, t. 24, s. 167–213.

Derbyshire J., *Obsesja liczb pierwszych. Bernhard Riemann i największy nierozwiązany problem w matematyce*, tłum. R. Kirwiel, M. Kulas, Poznań 2009.

Dummett M., *Frege: Philosophy of Mathematics*, London 1991.

Leśniewski S., *O podstawach arytmetyki*, „Przegląd Filozoficzny" 1927, nr 30, s. 164–206.

Monk R., *Ludwig Wittgenstein. Powinność geniusza*, Warszawa 2003.

Russell B., *List do G. Fregego*, [w:] *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, oprac. R. Murawski, Poznań 1986.

Tyl M., *Filozofia – historia – historia filozofii. Filozoficzne konteksty polskiej historiografii filozofii XX wieku*, Katowice 2012.