Poznanie geometryczne z kognitywnego punktu widzenia

Jerzy Pogonowski
Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu, Zakład Logiki Stosowanej

Mateusz Hohol, *Foundations of Geometric Cognition*, Routledge, London and New York, 2020, ss. 188.

1. Uwagi wstępne

Kilka lat temu Mateusz Hohol wspólnie z Bartoszem Brożkiem opublikował książkę *Umysł matematyczny* (Brożek i Hohol, 2014), która dotąd miała trzy wydania (2014, 2016, 2017) i doczekała się bardzo pozytywnych recenzji. Książka *Foundations of Geometric Cognition* również dotyczy specyficznego rodzaju ludzkiego poznania, jakim jest poznanie matematyczne, przy czym uwaga autora skierowana jest przede wszystkim na poznanie geometryczne. Te zagadnienia wstępnie omawiał autor stosunkowo niedawno w kilku artykułach, np.: *Od przestrzeni do abstrakcyjnych pojęć. W stronę poznania geometrycznego* (Hohol, 2018, tekst odczytu wygłoszonego na V Konferencji Filozofii Matematyki i Informatyki, Poznań, 2016), *Cognitive artifacts for geometric reasoning* (Hohol i Miłkowski, 2019). Mateusz Hohol prowadzi także kursy dotyczące poznania matematycznego (wspólnie z Krzysztofem Ciporą). Zajmują go również problemy metodologiczne nauk kognitywnych, czego wyrazem jest m.in. książka *Wyjaśnić umysł: struktura teorii neurokognitywnych*

Zagadnienia Filozoficzne w Nauce (Philosophical Problems in Science)
nr 70 (2021), ss. 183–211

(Hohol, 2013). Ma wreszcie doświadczenie, jeśli chodzi o eksperymentalne aspekty nauk kognitywnych, co poświadczają jego liczne artykuły przedstawiające wyniki konkretnych badań.

Refleksja nad matematyką jako sferą ludzkiego poznania ma wielowiekową tradycję, datującą się od czasów Platona. Rozważane w niej były problemy ontologiczne (jak istnieją obiekty matematyczne), epistemologiczne (jaki mamy dostęp poznawczy do obiektów matematycznych), zastanawiano się nad związkami łączącymi matematykę ze światem fizycznym (dlaczego matematyka jest skuteczna w opisie tego świata i dostarcza wiarygodnych predykcji), próbowano też objaśniać mechanizmy rządzące rozwojem matematyki. Tego typu refleksje należą do filozofii, metodologii nauk oraz historii matematyki. Niektóre nowe typy refleksji proponują natomiast nauki kognitywne, których głównym zadaniem jest badanie możliwości poznawczych, przede wszystkim człowieka, ale także innych organizmów. Ponieważ nauki kognitywne odwołują się do ustaleń i metod wypracowanych w wielu innych dyscyplinach (m.in.: biologii, psychologii, logice, lingwistyce, informatyce), więc można oczekiwać, że proponowane przez nie wizje i teorie struktur poznawczych będą wieloaspektowe i że owa interdyscyplinarność dostarczy głębszych wyjaśnień badanych zjawisk.

Prace proponujące kognitywne ujęcia matematyki dotyczą m.in.: mechanizmów tworzenia pojęć abstrakcyjnych, przyswajania pojęcia liczby, wykształcania się umiejętności arytmetycznych, orientacji przestrzennej, reprezentacji pojęć matematycznych w umyśle. Stosunkowo liczne w literaturze przedmiotu są prace poświęcone aspektom czysto numerycznym. Mniej liczne są natomiast opracowania poświęcone podstawom poznania geometrycznego, co autor podkreśla w swojej książce.

2. Kognitywne podejście do geometrii

Mateusz Hohol stara się wykazać w *Foundations of Geometric Cognition*, że ludzkie umiejętności geometryczne są ściśle powiązane z możliwościami poznawczymi, które oferuje nam mózg, zwłaszcza w dziedzinie reprezentacji wzrokowego postrzegania przestrzennego, przede wszystkim odnoszącego się do rozpoznawania obiektów oraz przemieszczania się w przestrzeni. Możliwości te realizują się już na wczesnym etapie rozwoju. Za rozwój poznania geometrycznego są jednak odpowiedzialne również inne czynniki wskazane przez autora, m.in.: umiejętność tworzenia pojęć abstrakcyjnych, kształtowanie się myślenia geometrycznego w oparciu o struktury językowe oraz umiejętność tworzenia diagramów. W centrum zainteresowania autora znajduje się geometria euklidesowa – autor przedstawia argumentacje, które mają uzasadnić, że stworzenie takiego systemu geometrii było możliwe właśnie ze względu na wspomniane wyżej czynniki.

Autor podzielił tekst na cztery rozdziały, zachowując wewnątrz każdego z nich jednorodność poruszanej problematyki. Za trafne pod względem kompozycyjnym uważać należy rozpoczęcie każdego rozdziału zapowiedzią zawartych w nim wyników, a zakończenie podsumowaniem tego, co w danym rozdziale udało się wykazać.

2.1. Myślenie geometryczne

Mateusz Hohol rozpoczyna rozdział pierwszy (*Geometric thinking, the paradise of abstraction*) od prezentacji wybranych faktów dotyczących genezy systemu geometrii wyłożonego w *Elementach* Euklidesa. Jak wiadomo, traktat Euklidesa obejmował nie tylko geometrię płaską i przestrzenną (Księgi I–IV, XI–XIII), ale zawierał także rozdziały poświęcone arytmetyce (Księgi VII–IX) i teorii proporcji wielkości (Księgi V–VI). Przez wiele wieków *Elementy* były podstawowym tekstem matematycznym, a geometria traktowana była jako główna dyscyplina matematyczna. Także refleksja filozoficzna nad matematyką skupiała się na problemach związanych z geometrią, co autor pokazuje, przytaczając poglądy Platona, Kartezjusza i Kanta. Mateusz Hohol odnotowuje także uwagę Henri Poincarégo, że geometria euklidesowa jest i pozostanie najbardziej dogodnym spośród wielu możliwych systemów geometrii. Wskazuje jednak również na pogląd przeciwny, głoszony przez Hermanna von Helmholtza, który uważał, że geometria euklidesowa nie jest jakoś szczególnie uprzywilejowana. Jej użyteczność w opisie otaczającej nas rzeczywistości powinna podlegać, wedle Helmholtza, empirycznej weryfikacji.

Rozdział pierwszy porusza jeszcze trzy inne typy zagadnień: psychologiczne aspekty rozwoju umiejętności geometrycznych, nauczanie geometrii euklidesowej w szkole oraz stosunek dotychczasowych refleksji kognitywnych do geometrii. Autor przypomina ustalenia Bärbel Inhelder i Jeana Piageta dotyczące rozwoju intelektualnego dzieci, przede wszystkim jeśli chodzi o przyswajanie sobie pojęć geometrycznych, ale przywołuje także wyniki bardziej współczesnych badań, ukazujące pewne ograniczenia stwierdzeń formułowanych przez wspomnianych psychologów. Pisząc o nauczaniu geometrii w szkole, autor przedstawia propozycje Diny van Hiele-Geldolf oraz Pierre'a van Hiele, którzy postulowali, że przyswajanie sobie pojęć i umiejętności geometrycznych odbywa się na kolejnych etapach, tworzących swoistą hierarchię. Etap pierwszy jest wizualny, drugi opisowy, trzeci relacyjny, czwarty odnosi się do formalnych dedukcji, a piąty do rozważań na metapoziomie. Mateusz Hohol przywołuje jednak również ustalenia innych badaczy, którzy uzupełniali omawiany model, opierając się na wynikach eksperymentów dydaktycznych.

Pod koniec rozdziału pierwszego autor krótko przypomina znaczące fakty związane z genezą nauk kognitywnych. Zauważa, że w dotychczasowych refleksjach dotyczących matematyki prowadzonych w tych naukach mieliśmy do czynienia z ciekawą różnicą: w badaniach zdolności numerycznych odnoszono się zwykle do najprostszych czynności związanych z liczeniem, natomiast rozważania dotyczące geometrii (prowadzone np. w ramach badań nad sztuczną inteligencją) odwoływały się raczej do rozumowań, przeprowadzanych na bardziej abstrakcyjnym poziomie.

2.2. Badania eksperymentalne

Rozdział drugi (*The hardwired foundations of geometric cognition*) informuje przede wszystkim o wynikach badań eksperymentalnych nad poznaniem geometrycznym, ale także o próbach konstrukcji teorii, wyjaśniających wyniki eksperymentów. Występujący w tytule rozdziału termin „hardwired" ma następujące objaśnienia w *Cambridge Dictionary*:

1. automatically thinking or behaving in a particular way;
2. built to work in a particular way that cannot be changed with new software;
3. physically connected by wires for carrying a signal.

Słowniki angielsko-polskie podają następujące tłumaczenia terminu „hardwired": zaprogramowany, zakorzeniony, wbudowany, zakodowany, podłączony. Tytuł rozdziału zapowiada więc, że będzie w nim mowa o tym, jak poznanie geometryczne opiera się na strukturach i funkcjonowaniu mózgu i układu nerwowego, a dokładniej: co na razie wiemy na ten temat na podstawie przeprowadzanych eksperymentów.

Ponieważ dysponujemy sporą różnorodnością wyników badań eksperymentalnych dotyczących tego, jak ludzie i zwierzęta poznają świat, więc potrzebna jest jakaś rozsądna ich systematyzacja. Mateusz Hohol wykorzystuje w tym celu cztery rodzaje pytań eksplanacyjnych zaproponowanych przez Nikolaasa Tinbergena w *On aims and methods of ethology* (Tinbergen, 1963):

Ujęcie	Aspekty bezpośrednie	Aspekty końcowe (ewolucyjne)
synchroniczne	Jak to działa? (pytanie o przyczynę)	Jak to wspomaga przystosowanie? (wartość adaptacyjna)
diachroniczne	Jak to się rozwija? (ontogeneza)	Jak to powstało? (filogeneza)

W filozoficznej refleksji nad poznaniem geometrycznym wybierano (za Kantem) tezę o wrodzoności tego typu poznania i w konsekwencji przekonanie o istnieniu jakiegoś modułu w mózgu, który byłby za geometryczne poznanie odpowiedzialny lub też wybierano pogląd (reprezentowany przez Helmholtza), że poznanie to kształtowane jest w trakcie uczenia się struktury przestrzennej świata rozpoznawanej w aktach percepcji. We współczesnych badaniach w psychologii oraz w neuronauce często zakłada się, że bardziej zaawansowane zdolności poznawcze nadbudowywane są nad prostszymi, filogenetycznie ukształtowanymi zdolnościami, poprzez interakcje podmiotów poznających z ich otoczeniem fizycznym i społecznym. Mateusz Hohol przyjmuje takie właśnie założenia w swoich analizach genezy i funkcjonowania poznania geometrycznego.

Dla ustalenia tych filogenetycznych uwarunkowań przeprowadzano wiele eksperymentów (na dzieciach i dorosłych, a także na gryzoniach, ptakach i innych stworzeniach) mających wykazać, że w próbach osiągnięcia celu jakiejś akcji (np. poszukiwaniu pożywienia) podmioty eksperymentu wykorzystują informacje natury geometrycznej. Takie informacje dotyczyć mogą kierunków, odległości, kątów, kształtów, ale również pewnych operacji geometrycznych, np. rotacji kształtów płaskich oraz brył. Prowadzono także obserwacje zachowań innych zwierząt (np. owadów), wnioskując na ich podstawie o wykorzystywaniu przez badane istoty reprezentacji przestrzennych.

Wyniki badań eksperymentalnych powinny być oczywiście interpretowane w ramach jakiejś teorii. Autor przywołuje kilka znanych z literatury przedmiotu propozycji, np. postulat istnienia szczególnego systemu poznawczego u kręgowców, nazywanego modułem geometrycznym, który miałby być odpowiedzialny za wykorzystanie wskazówek geometrycznych z otoczenia dla lokalizacji określonych miejsc. Tzw. rama metryczna będąca składnikiem tego modułu miałaby odpowiadać temu, co wcześniej w psychologii nazywano mapą poznawczą, a co odnosiło się do niejęzykowych reprezentacji umysłowych środowiska. Za przejawy działania takiego modułu uważa się aktywację tzw. komórek miejsca, znajdujących się w hipokampie. Także w korze śródwęchowej wykryto komórki siatki, kierunku ruchu, prędkości oraz komórki graniczne. Autor zwraca szczególną uwagę na propozycje przedłożone przez Elizabeth Spelke i jej współpracowników, które zamiast pojęcia modułu wykorzystują pojęcie rdzennego systemu poznawczego. System ten spełnia wiele funkcji, jest np. odpowiedzialny za przyswojenie sobie przez dziecko zasad zachowania się obiektów nieożywionych, wykształcenie intuicji protonumerycznych, rozumienie nakierowanych na cel zachowań obiektów ożywionych. Umożliwia on nam także geometryczną reprezentację otoczenia, w którym się poruszamy oraz rozpoznawanie kształtów płaskich i przestrzennych. Jeśli chodzi zatem o poznanie geometryczne, to (zdaniem Spelke) bazuje ono na dwóch systemach poznawczych odbierających i przetwarzających informacje z otoczenia, które charakteryzują się tym, że są stare ewolucyjnie, wczesne rozwojowo, a w dodatku także kulturowo uniwersalne:

1. *Core system of layout geometry*. Związany jest z hipokampem i korą śródwęchową. Przetwarza reprezentacje trójwymiarowych układów przestrzennych. Jest wykorzystywany do orientacji w otaczającym organizm środowisku. System ten jest czuły na informacje dotyczące odległości oraz kierunku (ale nie kątów).
2. *Core system of object geometry*. Związany jest z bocznymi strukturami płata potylicznego. Przetwarza obrazy dwuwymiarowe i ruchome wzorce wizualne, umożliwia m.in. dokonywanie w umyśle obrotu obiektów. Służy przede wszystkim do kategoryzacji obiektów. System ten jest czuły na informacje dotyczące długości i kątów (ale nie kierunku).

W dalszych częściach tego rozdziału autor odpowiada na cztery pytania wspomniane wcześniej, czyli pytania o: przyczynę, wartość adaptacyjną, ontogenezę i filogenezę rdzennych systemów geometrii. Szczególnie interesujące są fragmenty dotyczące filogenezy, w których autor omawia wyniki obserwacji i eksperymentów (oraz związanych z nimi kontrowersji) poświęconych reprezentacji przestrzennej i nawigacji u różnych gatunków zwierząt. Interpretacja tych wyników może skłaniać do przypuszczenia, że jakieś formy poznania geometrycznego były obecne już na bardzo wczesnych etapach ewolucji. Z kolei ustalenia ontogenetyczne pozwalają przypuszczać, że pewne ograniczenia każdego z dwóch rdzennych systemów geometrii zostają przezwyciężone poprzez nowy, specyficzny dla człowieka system, w którym adekwatnie ujmowane są długość, kierunek, kąty, a którego utworzenie umożliwione jest poprzez wykorzystanie języka zawierającego wyrażenia przestrzenne oraz wykorzystanie symbolicznych reprezentacji graficznych.

2.3. Abstrakcje i poznanie ucieleśnione

Rozdział trzeci (*Embodiment and abstraction*) dotyczy tworzenia i przetwarzania pojęć abstrakcyjnych. Status pojęć abstrakcyjnych był zawsze w centrum zainteresowania filozofii. W książce Mateusza Hohola nie chodzi jednak oczywiście o odwoływanie się do refleksji filozoficznych na temat tych pojęć, ale o to, jak ujmowane są one w perspektywie nauk kognitywnych. W początkowej fazie rozwoju tych nauk pojęcia rozumiane były jako amodalne reprezentacje umysłowe, przetwarzane przez systemy poznawcze niezwiązane bezpośrednio np. z percepcją ruchu, a odwołujące się raczej do manipulacji na symbolach. Mateusz Hohol wskazuje jednak na pewne istotne trudności takiego amodalnego podejścia na przykładzie omawianego przez Harnada tzw. problemu ugruntowania pojęć: w jaki sposób możemy nadać znaczenie symbolom, odwołując się jedynie do innych symboli i łączących je reguł?

Bardziej współczesne podejścia w naukach kognitywnych próbują rozwiązać tego typu problemy poprzez odwołanie się do idei poznania ucieleśnionego. Wedle takich ujęć pojęcia ugruntowane są w ostatecznym rozrachunku na aktywnościach sensoro-motorycznych. Skrajna wersja ucieleśnionego poznania w odniesieniu do pojęć matematycznych została zaprezentowana w monografii Lakoffa i Núñeza *Where Mathematics Comes from: How the Embodied Mind Brings*

Mathematics into Being (Lakoff i Núñez, 2000), której autorzy twierdzą, że całość genezy i funkcjonowania matematyki można wyjaśnić przez odwołanie się do tworzenia abstrakcyjnych pojęć metodą metafor poznawczych, które wywodzą te pojęcia z pojęć prostszych, a ostatecznie odwołują się do doświadczenia sensoro-motorycznego. Propozycjom Lakoffa i Núñeza brakuje jednak solidnych podstaw empirycznych, a ich prezentacja zawiera stwierdzenia, na których nietrafność zwracali uwagę matematycy w recenzjach tej pracy. Mateusz Hohol przywołuje również zastrzeżenia wobec tej koncepcji formułowane na gruncie psychologii rozwojowej (zdolność rozumienia metafor poznawczych jest późniejsza niż zdolność rozumienia pojęć abstrakcyjnych), neuronauki (struktury sensoro-motoryczne nie zawsze są aktywowane podczas operowania na pojęciach abstrakcyjnych) czy wreszcie historii matematyki (podstawy greckiej geometrii nie były ustalane metodą tworzenia metafor pojęciowych).

Mateusz Hohol odnosi się natomiast z sympatią do pewnych umiarkowanych koncepcji ucieleśnionego poznania, jak np. koncepcja ucieleśnionego i odcieleśnionego poznania Guya Dove'a, która miałaby uzgodnić reprezentacyjną teorię umysłu ze stosownie rozumianym poznaniem ucieleśnionym, odwołując się również do wypracowanej przez Lawrence'a Barsalou teorii symboli percepcyjno-motorycznych i proponowanej przez Allana Paivio koncepcji podwójnego kodowania. Potwierdzono empirycznie istnienie w strukturach sensoro-motorycznych tzw. symulatorów, będących swoistymi wzorcami aktywności, przywoływanymi podczas operowania pojęciami. Teoria podwójnego kodowania postuluje istnienie dwóch rodzajów reprezentacji umysłowych: jeden z nich funkcjonuje analogowo, na zasadzie podobieństwa percepcyjnego, drugi natomiast odpowiedzialny jest za kodowanie symboli językowych. Pojęcia konkretne kodowane i przetwarzane są w obu wymienionych rodzajach reprezentacji, natomiast pojęcia abstrakcyjne jedynie w drugim z nich. I to właśnie pojęcia abstrakcyjne są od-cieleśnione w tym sensie, gdyż ich znaczenie nie zależy tylko od czynników sensoro-motorycznych. Oba systemy reprezentacji jednak współdziałają, przez co problem ugruntowania pojęć wydaje się być rozwiązany. Mateusz Hohol przytacza liczne przykłady wyników badań eksperymentalnych (neuroobrazowanie, przezczaszkowa stymulacja magnetyczna, potencjały wywołane, eksperymenty behawioralne), które potwierdzają tezę o werbalnym kodowaniu pojęć abstrakcyjnych. Wedle Guya Dove'a kodowanie językowe pojęć wyłania się w procesie ontogenezy, zgodnie z koncepcją rozwoju psychicznego proponowaną przez Lwa Wygotskiego.

2.4. Historia kognitywna

W rozdziale czwartym (*Cognitive artifacts and Euclid: diagrams and formulae*) autor wraca do omawianego na początku książki systemu geometrii Euklidesa. Nie są to jednak rozważania na temat historii matematyki, ale raczej to, co Reviel Netz w swoim znanym dziele *The Shaping of Deduction in Greek Mathematics* (Netz, 1999) nazywa historią kognitywną. W interesującym nas tutaj przypadku chodzi o historię kognitywną poznania geometrycznego, którego rezultatem jest w pełni ukształtowany system geometrii euklidesowej. Istotną rolę w tym systemie pełnią rozumowania dedukcyjne. Do podstawowych środków używanych w tych rozumowaniach Netz zalicza diagramy wyposażone w oznaczenia literowe oraz wyspecjalizowany język, odnoszący się do pojęć geometrycznych i składający się ze stabilnych co do formy i znaczenia wyrażeń. Wedle Netza użycie tych środków przyczynia się do uzyskania przez rozważane rozumowania dwóch fundamentalnych cech: pełnej ogólności oraz koniecznego charakteru uzyskiwanych wniosków.

Jak wiadomo, w *Elementach* podaje się definicje, postulaty i pojęcia wspólne. Niektóre z definicji są objaśnieniami intuicyjnymi. Pojęcia wspólne związane są z tym co dzisiaj nazywamy aksjomatami identyczności. Postulaty sformułowane są następująco (Euklides, 2013, s. 275):

1. Niech będzie postulowane, aby z każdego punktu do każdego punktu poprowadzić linię prostą.
2. I przedłużyć ograniczoną prostą w sposób ciągły na prostej.
3. Z danego centrum i danym promieniem zakreślić koło.
4. Kąty proste są równe jeden drugiemu.
5. Gdy prosta, padając na dwie inne proste, tworzy kąty wewnętrzne na tej samej części mniejsze dwóm kątom prostym, to te dwie proste przedłużane nieskończenie dotkną się na tej części, na której są mniejsze dwóm kątom prostym.

We wszystkich twierdzeniach i zadaniach konstrukcyjnych wykorzystuje się jedynie podane definicje, pojęcia wspólne i postulaty, bez żadnych odwołań do jakichkolwiek ustaleń zewnętrznych. Całkiem osobnym problemem jest to, że w rozumowaniach Euklidesa są pewne ukryte założenia, dotyczące np. przecinania się linii, na co zwrócono uwagę w XIX wieku, proponując aksjomatyczne ujęcia geometrii euklidesowej (Moritz Pasch, David Hilbert).

Zasadniczo wszystkie twierdzenia w *Elementach* Euklidesa mają wyraźnie zaznaczoną schematyczną budowę (Euklides, 2013, s. 122–123):

1. *Protasis*. Teza.

2. *Ekhtesis*. Ustalenie oznaczeń odnoszących się do diagramu.
3. *Diorismos*. Powtórzona teza w wersji z oznaczeniami.
4. *Katauskene*. Konstrukcja, zasadniczy pomysł dowodu, trik.
5. *Apodeixis*. Uzasadnienie.
6. *Symperasma*. Powtórzona teza.

W przypadku dowodów przeprowadzanych metodą nie wprost (np. twierdzenie 18 w Księdze V i twierdzenia 7 oraz 26 w Księdze VI) część 4 rozpoczyna zwrot „w przeciwnym razie" (lub zaprzeczenie tezy), a część 5 kończy zwrot „co jest niemożliwe" („absurdalne"). Wyróżnia się ponadto:

1. *twierdzenia* – część 6 jest powtórzeniem części 1, w której użyty jest zwrot „twierdzę, że";
2. *problemy (zadania konstrukcyjne)* – część 6 jest powtórzeniem części 3, a w części 1 używa się zwrotu „należy więc".

Poszczególne twierdzenia *Elementów* prezentowane są w postaci diagramu (z literowymi oznaczeniami) oraz tekstu, zorganizowanego wedle podanego wyżej schematu. Mateusz Hohol analizuje szczegółowo twierdzenie 1 z Księgi I (problem konstrukcji trójkąta równobocznego). Dyskutuje rolę diagramów w różnych ujęciach geometrii (ilustracyjną np. w *Grundlagen der Geometrie* Davida Hilberta (Hilbert, 1899), a informacyjną w *Elementach* Euklidesa) oraz ich status ontologiczny (czy są reprezentacją czegoś innego, jakichś bytów platońskich, czy też są po prostu konkretnymi obiektami). Przywołuje także ustalenia Reviela Netza dotyczące struktury i funkcji języka geometrii greckiej. Wedle tych ustaleń określić można zespół wykorzystywanych wyrażeń językowych, dzieląc je na kilka typów: wyrażenia dotyczące obiektów, konstrukcji, zależności (np. proporcji), argumentacji, a także formuły drugiego rzędu (np. *quod erat demonstrandum*).

Jeśli chodzi o ogólność twierdzeń geometrycznych *Elementów*, to – zdaniem Netza – wynika ona z możliwości powtarzania rozumowań, na co miałyby wskazywać np. liczne w tekście użycia wyrażeń w rodzaju: „w podobny sposób dowodzimy, że". Takie wyrażenia mają wskazywać na posiadaną przez matematyka dyspozycję do przeprowadzania dowodów podobnych do już uzyskanych. Twierdzenia geometryczne uzyskują jednak walor ogólności także przez to, że odwołujemy się w nich wyłącznie do znaczenia używanych terminów (określonego przez definicje i postulaty).

Mateusz Hohol cytuje następujący fragment z pracy Netza, odnoszący się do waloru konieczności dowodów w matematyce greckiej (Netz, 1999, s. 215):

> The necessity preserving properties of Greek mathematical proofs are all reflected by their proofs, and no meta-mathematical considerations are required. As a rule, the necessity of assertions is either self-evident (as in starting points) or dependent on nothing beyond the immediate background. [...] The structure of derivation is fully explicit. Immediate inspection is possible; this, and no meta-mathematical consideration is the key to necessity. [...] Greek mathematical proofs offer nowhere to hide. Everything is expectable.

Formalne pojęcie dowodu zostało zaproponowane dopiero wtedy, gdy logika matematyczna osiągnęła wystarczający ku temu poziom rozwoju. Jednak zanim to nastąpiło matematycy przeprowadzali rzecz jasna rozumowania dedukcyjne, które były akceptowane w ich społeczności. Historia matematyki notuje stosunkowo nieliczne przypadki nieuprawnionych (z późniejszego punktu widzenia) rozumowań matematycznych. Refleksja teoretyczna nad rozwojem pojęcia dowodu matematycznego jest żywo obecna we współczesnej filozofii matematyki, nie było jednak zamiarem autora recenzowanej książki włączenie się do takiej refleksji. Również Reviel Netz we wstępie do swojej książki deklaruje, że nie zajmuje się tak ogólnymi problemami, a skupia swoją uwagę na konkretnej praktyce dowodowej w matematyce greckiej.

3. Podsumowanie

Dokonajmy na koniec krótkiego podsumowania: co udało się ustalić autorowi, o jakie elementy można byłoby ewentualnie uzupełnić jego argumentację, jakie dalsze badania wydają się potrzebne w interesującej nas materii.

Mateusz Hohol uwzględnia w swoich rozważaniach imponującą liczbę przeprowadzonych w naukach kognitywnych eksperymentów i obserwacji. Sama bibliografia liczy kilkaset pozycji, a na prawie każdej stronie książki przywoływane są wyniki badań (na marginesie warto dodać, że autor także przeprowadzał badania empiryczne). Ten ogrom materiału jest jednak dobrze uporządkowany, m.in. poprzez przemyślane pogrupowanie tego materiału, tak, aby uzyskać odpowiedzi na wspomniane wyżej pytania eksplanacyjne (o przyczynę, wartości adaptacyjne, ontogenezę i filogenezę).

Autor argumentuje na rzecz swojej wizji poznania geometrycznego odwołując się właśnie do tak uporządkowanego materiału. Wedle Mateusza Hohola nasze kompetencje geometryczne nie są wynikiem uzyskanego jedynie poprzez akty percepcji przestrzennego obrazu otaczającego nas świata, nie są też wytworzone wyłącznie poprzez eksplorację otoczenia. Autor twierdzi mianowicie, że źródłem kompetencji geometrycznych są dwa rdzenne systemy poznawcze, dotyczące rozpoznawania obiektów oraz układu otoczenia. Za filogenetycznym zakorzenieniem tych układów ma przemawiać to, że można zaobserwować ich działanie we wczesnych etapach rozwoju dziecka, a także u innych zwierząt. Jednak dopiero współdziałanie tych systemów pozwala uzyskać wrażliwość zarówno na kąty i kierunki, jak i na odległości. Z kolei to współdziałanie wzmacniane jest w trakcie indywidualnego rozwoju, wspomaganego używaniem języka oraz innych inwencji kulturowych.

Mateusz Hohol unika też skrajności w podejściu do umysłowego przetwarzania pojęć abstrakcyjnych, czyli z jednej strony stanowiska w pełni amodalnego, a z drugiej stanowiska propagującego całkowite ucieleśnienie poznania. Wybiera stanowisko pośrednie, umiarkowanego ucieleśnienia, dopuszczające wpływ systemu sensoromotorycznego na tworzenie pojęć abstrakcyjnych, ale uwzględniające też istotną rolę języka w ustalaniu znaczeń pojęć abstrakcyjnych.

Autor odnosi się wreszcie także do cech specyficznych systemu geometrii przedstawionego w *Elementach* Euklidesa, a konkretnie do ogólności oraz koniecznego charakteru twierdzeń systemu. Wychodząc od koncepcji historii kognitywnych Reviela Netza, Mateusz Hohol argumentuje na rzecz tezy, że poznanie geometryczne specyficzne dla rodzaju ludzkiego przedstawiane w tym systemie wyłoniło się w szczególnej „niszy kognitywnej", z charakterystycznym dla niej użyciem skodyfikowanego języka oraz diagramów, wzmacniającym filogenetycznie zakorzenione możliwości poznawcze.

Mateusz Hohol nie twierdzi bynajmniej, że uzyskaliśmy oto ostateczną i spójną wizję poznania geometrycznego. W krótkim rozdziale końcowym (*Conclusions and future directions for research*) zwraca uwagę na potrzebę dalszych badań eksperymentalnych dotyczących funkcjonowania i współdziałania rdzennych geometrycznych systemów poznawczych, a także na potrzebę wypracowania ogólnej perspektywy teoretycznej, w której poznanie geometryczne uwzględniałoby nie tylko rozwój indywidualny, ale również czynniki natury społecznej.

Może warto podkreślić, że propozycje teoretyczne autora są rzecz jasna *zewnętrzne* wobec samej geometrii, rozumianej jako część matematyki. Oceniać je należy zatem jako określone stanowisko epistemologiczne, biorące pod uwagę wyniki szczegółowe różnych nauk (biologii, neuronauki, etologii itd.).

Dodam jeszcze garść uwag, które nasunęły mi się przy lekturze *Foundations of Geometric Cognition*. Nie mają one charakteru krytycznego wobec omawianego tekstu, wiążą się raczej z oczekiwaniami (być może naiwnymi) piszącego te słowa wobec rozważań na temat poznania geometrycznego. Jest oczywiste, że inne oczekiwania w tej materii może mieć matematyk, inne specjalista nauk kognitywnych, a jeszcze inne filozof zajmujący się epistemologią. Książka z pewnością doczeka się takich specjalistycznych omówień, natomiast niniejsze uwagi mają charakter dość ogólny.

3.1. Uwagi historyczne

Co to znaczy, że dane pojęcie jest geometryczne? W systemie geometrii Euklidesa pojęcia wyjściowe mają wysoce abstrakcyjny charakter: punkt jest „tym, co nie ma części", linia jest „długością bez szerokości", linia prosta jest „tym, co leży równo względem punktów na niej" (jest przy tym obiektem skończonym, który można jednak „dowolnie przedłużać w sposób ciągły"), powierzchnia jest „tym, co ma tylko długość i szerokość", powierzchnia płaska to „ta, która leży równo względem prostych na niej" itd. Pewne dalsze pojęcia definiowane są poprzez zależności z innymi lub poprzez wynik operacji wykonywanych na innych (np. sfera jako wynik obrotu półokręgu). Nie są to więc pojęcia, które bezpośrednio odpowiadają czemuś w środowisku otaczającym człowieka. Pewnymi przybliżeniami są np. płaska powierzchnia morza, widoczny promień światła, miejsce, na które pada ten promień.

W książce Mateusza Hohola mówi się głównie o takich pojęciach jak: odległość, kąt oraz kierunek (często: odróżnienie lewej od prawej). Jak rozumiem, to właśnie te pojęcia mogą być uwzględniane w eksperymentach przeprowadzanych w naukach kognitywnych. Zastanawiam się, jak ustalenia na temat filogenetycznego zakorzenienia tych pojęć przekładają się na tezę, że nasze poznanie geometryczne bazuje na geometrii *euklidesowej* lub prowadzi do zachowań zgodnych z faktami (twierdzeniami) na gruncie tej geometrii. Czy wyniki przeprowadzanych w naukach kognitywnych eksperymentów i obserwacji jednoznacznie przesądzają o tym, że chodzi właśnie o geometrię euklidesową, a nie jakiś system – nazwijmy to tak – *protogeometrii*, która dopiero potem, na skutek działania czynników kulturowych, przybiera postać systemu geometrii euklidesowej? System geometrii przedstawiony w *Elementach* poprzedzały liczne obserwacje i ustalenia dotyczące praktycznych aspektów stosunków przestrzennych, o czym obszernie informują dzieła poświęcone początkom matematyki. Hipotetyczna protogeometria uwzględniać mogłaby kierunki, odległości i kąty (może również kształty i ruchy?), ale także lokalne (w skali ludzkiego doświadczenia) własności przestrzeni fizycznej.

W badaniach kognitywnych nad poznaniem numerycznym mówi się m.in. o tzw. *approximate number system* oraz o *object tracking system*: pierwszy z nich miałby być odpowiedzialny za przybliżone ustalanie wielkości kolekcji bez odwoływania się do języka, drugi za umiejętność operowania na bardzo małych liczebnościach (do czterech elementów). Czy w badaniach nad poznaniem geometrycznym, w szczególności tych dotyczących omawianych w książce rdzennych geometrycznych systemów poznawczych również zakładamy (odkrywamy?), że systemy te mają charakter przybliżony?

Książka Mateusza Hohola zawiera stosunkowo niewiele uwag historycznych na temat rozwoju systemów geometrycznych. Nie można jej tego braku zarzucać, bo cele autora nie były nakierowane na taką analizę. Sądzę jednak, że rozwijając (tworząc?) teorię poznania geometrycznego i zakładając przy tym koncepcję historii kognitywnej Reviela Netza należałoby sprawie tej poświęcić o wiele więcej uwagi. Jest bowiem w tej historii wiele znaczących momentów i przełomów, które powinny być fascynujące dla nauk kognitywnych. Materiału źródłowego do refleksji dostarczają liczne opracowania historyczne (pisane głównie przez samych matematyków), a otwartym problemem pozostaje, czy nauki kognitywne mogą ten materiał efektywnie wykorzystać dla swoich celów. Nie pretendując do kompletności wskazałbym na kilka następujących zagadnień (omawianych zresztą w opracowaniach historycznych):

1. Geometryczne ujmowanie wielkości w matematyce greckiej, co zdaniem niektórych było odpowiedzialne za mniejszy nacisk kładziony na rozważania arytmetyczne i algebraiczne. Mawia się, że połowa teorii liczb rzeczywistych była dostępna już Eudoksosowi, jednak całość tej teorii uzyskaliśmy dopiero w wieku XIX (Richard Dedekind, Georg Cantor, Karl Weierstrass i in.).
2. Dwa typy ujęć geometrii: syntetyczne, odwołujące się jedynie do aksjomatów i konstrukcji postulowanych w systemie (Euklides, a później np. Karl von Staudt) oraz analityczne (Kartezjusz, Fermat, a później wielu innych), wykorzystujące układy współrzędnych i algebraiczne reprezentacje tworów geometrycznych.

To drugie podejście umożliwione zostało poprzez nowe rozumienie obiektów geometrycznych i wykonywanych na nich operacji (Descartes, 2015).

3. Różnica między porządkiem chronologicznym a logicznym w dziedzinie systemów geometrycznych. Geometria rzutowa (Desargues, a później m.in. Poncelet, Monge, Chasles i in.) została wyodrębniona o wiele później niż geometria euklidesowa, choć w porządku logicznym jest o wiele bardziej ogólna od tej ostatniej (podobne ustalenia dotyczą też innych systemów geometrii, np. afinicznej). Jak wiadomo, z różnicą między porządkiem chronologicznym a logicznym mamy do czynienia także w przypadku rozumienia pojęcia liczby.
4. Zmiany w poglądach na to, czym właściwie są systemy geometrii. Zwykle podkreśla się, że stworzenie (odkrycie) geometrii nieeuklidesowych przyczyniło się do porzucenia tezy, że geometria Euklidesa z konieczności jest *prawdziwą* geometrią, dobrze opisującą świat fizyczny. Przełomowe było też powiązanie systemów geometrii z grupami przekształceń oraz niezmiennikami takich przekształceń, proponowane w programie z Erlangen (Klein, 1872). Być może ciekawe dla nauk kognitywnych byłoby zwrócenie uwagi na *przekształcenia* obiektów geometrycznych oraz ich niezmienniki.
5. Wykorzystanie w rekonstrukcji systemu geometrii Euklidesa liczb rzeczywistych (wraz z charakterystycznym dla nich aksjomatem ciągłości), co stało się głównie za sprawą *Grundlagen der Geometrie* (1899) Dawida Hilberta. Miało to konsekwencje metateoretyczne (m.in. możliwość udowodnienia kategoryczności systemu). Autorzy, piszący w XIX wieku o aksjomacie ciągłości (np. Georg Cantor, Richard Dedekind, Heinrich Weber) w sposób wyraźny podkreślali, że sformułowanie aksjo-

matu ciągłości jest twórczym aktem matematyki, niezależnym od możliwości rozstrzygnięcia, czy własność ciągłości przysługuje przestrzeni fizycznej.

6. Uogólnienia, które odwołują się do potęgi myślenia matematycznego, nieskrępowanego doświadczeniem potocznym. Tu dobrym (wczesnym historycznie) przykładem są systemy geometrii wielowymiarowej (Hermann Grassmann, Bernhard Riemann). Całkiem współczesne dzieje geometrii (i, ogólnie, matematyki) dostarczają licznych dalszych przykładów.

Może warte porównania z punktu widzenia nauk kognitywnych są też zestawy pojęć pierwotnych proponowanych przez matematyków. Moritz Pash: punkt, odcinek; Giuseppe Peano: punkt, relacja leżenia między; Mario Pieri: punkt, ruch; David Hilbert: punkt, prosta, płaszczyzna, relacja leżenia między, relacja leżenia na, przystawanie; Oswald Veblen: punkt, porządek; Edward Huntington: sfera, zawieranie; Alfred Tarski: punkt, relacja leżenia między, przystawanie. Doborem pojęć pierwotnych mogą kierować względy metateoretyczne (czy było tak w przypadku Euklidesa?), ale motywację stanowić mogą też przekonania na temat intuicyjności tych pojęć.

Przyznaję, że oczekiwałem, iż Mateusz Hohol wspomni w swojej książce o podejściach do geometrii, które za punkt wyjścia biorą nie wysoce abstrakcyjne pojęcia punktu i prostej, ale raczej pojęcia bryły i relacji bycia częścią, tak jak w słynnej propozycji Alfreda Tarskiego (Tarski, 1929). W takich ujęciach (a zaproponowano ich kilka) punkty są otrzymywane jako wynik infinitarnych operacji na obszarach. Matematyczne obszary i bryły wydają się być bliżej związane z obiektami i fragmentami naszego otoczenia. Relacja bycia częścią stanowi podstawę mereologicznego rozumienia pojęcia zbioru. Nie wiem, czy w naukach kognitywnych przeprowadzano eksperymenty mające orzekać, które z rozumień pojęcia zbioru – mereologiczne czy dystrybutywne – jest jakoś „naturalne poznawczo". Rozpoznawanie obiektów, ich konturów, ich ruchów dotyczy chyba raczej obszarów, brył oraz ich części. Umiejętność tworzenia pojęć abstrakcyjnych (punkt, prosta itp.) jest rzecz jasna o wiele późniejsza.

Filozoficzna refleksja nad przestrzenią i geometrią dostarczała różnych propozycji i argumentacji, czasem spekulatywnych, a czasem odwołujących się do wyników badań empirycznych. Zwolennikiem istnienia absolutnej przestrzeni był, jak wiadomo, Newton, podając np. słynny argument odnoszący się do zachowania się wody w wiadrze wprawionym w ruch wirowy. Inne było stanowisko Leibniza, dla którego przestrzeń jako taka nie istniała samoistnie, a tworzona była jedynie poprzez wzajemne relacje między przedmiotami. Czy przyjmując perspektywę historii kognitywnej Reviela Netza uwzględniamy (oprócz zwrócenia uwagi na warstwę językową i diagramy) także założenia natury filozoficznej, w kontekście których powstawał system geometrii Euklidesa? Być może jednym z takich założeń jest akceptowanie tylko nieskończoności potencjalnej (pamiętamy, że proste u Euklidesa są obiektami skończonymi, które mogą być jedynie dowolnie przedłużane). Już w czasach przed Euklidesem istniały też różne poglądy na temat struktury kontinuum geometrycznego (np. stanowiska Demokryta i Arystotelesa). Jednak pojęcie ciągłości w systemie Euklidesa nie jest dogłębnie analizowane.

Historia kognitywna poznania geometrycznego powinna też chyba uwzględniać rozwój optyki jako teoretycznej refleksji nad widzeniem. Traktaty na ten temat pisał zarówno Euklides, jak i Kartezjusz i Newton. Interesujące jest zagadnienie, jak ustalenia na terenie optyki wpływały na wyniki przewidywane i uzyskiwane w geometrii.

3.2. Reprezentacje przestrzenne

Nigdy nie prowadziłem badań eksperymentalnych dotyczących poznania matematycznego, więc moje uwagi na ten temat nie są profesjonalne. Jestem jednak ciekaw, jakie są ogólne zasady przeprowadzania eksperymetów odnoszących się do reprezentacji przestrzennych u różnych stworzeń. Reprezentacje przestrzenne mogą być oparte na wzroku, węchu, słuchu, dotyku, grawitacji, echolokacji, zmianach ciśnienia, polach magnetycznych, odczuciu temperatury lub wilgotności, poczuciu równowagi i zapewne jeszcze innych czynnikach. Jeśli – jak sugerowane jest to w książce – te reprezentacje są stare filogenetycznie, to czy możliwe jest uzyskanie na podstawie eksperymentów jednoznacznych wniosków na temat poznania geometrycznego? Jak możliwości poznawcze pojedynczych organizmów przekładają się na zachowania całych ich stad lub kolonii (np. stada ptasie, kolonie mrówek i termitów)?

Nie jestem pewien, czy eksperymenty myślowe mogą zostać z pożytkiem wykorzystane w badaniach poznania geometrycznego (choć oczywiście mogą dostarczać rozrywki intelektualnej). Czy myślący ocean (*Solaris*) dysponuje reprezentacjami przestrzennymi? Czy inteligentne chmury, w których otoczeniu nie byłoby żadnych ciał stałych tworzyłyby reprezentacje przestrzenne oparte na geometrii euklidesowej? Czy w takim przypadku ciała stałe byłyby obiektami ich mitologii? W książce Mateusza Hohola nie przeprowadza się tak niepoważnych rozważań, ale może miejsce dla nich (w stosownie poważnej wersji) znalazłoby się w refleksjach nad sztuczną inteligencją?

W przypadku człowieka mamy do czynienia z widzeniem dwuocznym (co umożliwia widzenie stereoskopowe), a obraz na siatkówce jest odwrócony (dopiero mózg jest odpowiedzialny za jego ponowne odwrócenie). Może umknęło to mojej uwadze w lekturze książki, ale czy dysponujemy już jakimiś wnioskami na temat percepcji wzrokowej stworzeń o innej budowie oczu? Jakie reprezentacje geometryczne mają takie stworzenia? Ponadto, w ludzkich reprezentacjach przestrzennych istotną rolę odgrywa korelacja ręka–oko. Jakie korelacje są ważne dla stworzeń, które mają całkiem inną budowę anatomiczną niż człowiek?

O ile pamiętam, w książce nie ma odniesień do iluzji (wzrokowych, dotykowych, słuchowych itd.). Czy można je pomijać w rekonstruowaniu podstaw poznania geometrycznego? W interpretacji obrazów bierzemy pod uwagę kierunek padania światła, rolę cienia, tło itp. Zarówno przy manipulacji obiektami jak i przy ocenie układów przestrzennych bierzemy pod uwagę (odczuwamy) grawitację. Oceny długości różnią się co do trafności w zależności od tego, czy porównujemy długości horyzontalne, czy też wertykalne.

Nie mamy oczywiście możliwości porównania intuicji geometrycznych, które mieli nasi bardzo dawni przodkowie z intuicjami żywionymi obecnie na wczesnych etapach rozwoju. Jak rozumiem, pewne wnioski na ten temat uzyskiwane są na podstawie badań przeprowadzanych wśród plemion żyjących do dzisiaj we względnym odosobnieniu (np. w Amazonii). Musimy zapewne pogodzić się z faktem, że propozycje dotyczące formowania się najwcześniejszych reprezentacji przestrzennych mają w sporej mierze charakter spekulacyjny.

W tzw. językoznawstwie kognitywnym (którego nie jestem ani znawcą, ani zagorzałym fanem, choć doceniam niektóre formułowane w nim propozycje) wiele uwagi poświęca się różnorodności językowych reprezentacji zależności przestrzennych w językach świata. Poszczególne języki używają różnych środków morfo-syntaktycznych dla wyrażania takich zależności. Dla przykładu, po polsku powiemy, że talerz z podobizną św. Jana Pawła II może leżeć *na* stole lub wisieć *na* ścianie, po niemiecku mamy różnicę: liegt *auf* dem Tisch, hängt *an* der Wand. Akceptowalne (gramatycznie!) jest powiedzenie, że prezydent pocałował papieża w rękę (w pierścień), a także powiedzenie, że prezydent pocałował rękę (pierścień) papieża, akceptowalne jest wreszcie powiedzenie, że papież pocałował płytę lotniska, ale nie jest akceptowalne powiedzenie, że papież pocałował lotnisko w płytę. W pewnych językach przyszłość jest tym, co znajduje się w przodzie, a przeszłość tym, co znajduje się w tyle, ale w niektórych innych językach jest akurat na odwrót. Gdy na drodze naszego marszu znajduje się góra, to w pewnych językach widzimy jej przód, a w innych widzimy właśnie jej tył. Byłbym bardzo ostrożny w kierowaniu się wskazówkami z języków etnicznych przy formułowaniu tez na temat wpływu struktury gramatycznej i leksykalnej języka na formowanie się reprezentacji przestrzennych. Jestem minimalistą, jeśli chodzi o interpretacje tez o relatywizmie i determinizmie językowym: poszczególne języki gramatykalizują różne rodzaje informacji, uważam jednak (dogmatycznie), że każdy rodzaj informacji wyrażony w jednym języku może zostać przekazany (być może z użyciem innych środków) w każdym innym języku.

3.3. Uwagi dydaktyczne

Poglądy dotyczące tego, jak powinna wyglądać dydaktyka matematyki zmieniały się nie tylko pod wpływem rozwoju samej matematyki. Istotną rolę odgrywały w procesie tych zmian także inne czynniki: ustalenia na temat rozwoju osobniczego, zmiany technologiczne, naciski polityczne, uprzedzenia itd. Mateusz Hohol pisze krótko o nauczaniu geometrii w rozdziale pierwszym książki, kończąc swoje uwagi apelem, by dydaktycy matematyki pilnie śledzili to, co nauki kognitywne mają do powiedzenia o poznaniu matematycznym.

Oczywiście apel ten jest rozsądny i godny zauważenia. Może jednak nie wszystko, co mówi się na temat matematyki i jej dydaktyki w naukach kognitywnych przekłada się na skuteczne rady edukacyjne (mam na myśli np. niektóre zalecenia tzw. ucieleśnionej matematyki w wydaniu Lakoffa i Núñeza).

Ponadto nawet szlachetne w swych intencjach zalecenia mogą być bądź niemożliwe do realizacji, bądź wręcz szkodliwe. Znanym przykładem jest spektakularne fiasko programu *New Math* usilnie propagowanego w latach sześćdziesiątych i siedemdziesiątych XX wieku, ale mamy też wcześniejsze przykłady, jak choćby propozycja George'a Halsteda z 1904 roku nauczania geometrii w oparciu o system aksjomatyczny Davida Hilberta z *Grundlagen der Geometrie*, która również nie odniosła sukcesu.

Nie miejsce tu, aby przedstawiać możliwości nauczania geometrii i oceniać różne sposoby nauczania. Geometria Euklidesa była i jest nauczana w szkole na różne sposoby i z różnych perspektyw. Na marginesie dodam, że samemu Euklidesowi przypisuje się autorstwo (zaginionej, wspomnianej jedynie przez Proklosa) księgi *Pseudaria*, która zawierała przykłady niepoprawnych dowodów, zebrane ku przestrodze uczących się matematyki (Acerbi, 2008). Powiem jednak parę słów o czym innym, a mianowicie o programie kursów matematycznych proponowanych na studiach kognitywistycznych w Polsce. W kilku ośrodkach prowadzi się jednosemestralny kurs *Matematyczne podstawy kognitywistyki*, w Warszawie kurs trwa (słusznie!) dłużej. Podczas jednego semestru udaje się (mówię teraz o Poznaniu) omówić w elementarnym zakresie kawałeczek matematyki dyskretnej (zbiory, relacje, funkcje, zliczanie obiektów, dowody przez indukcję, proste pojęcia algebraiczne) oraz wprowadzić w podstawy analizy (zbieżność ciągów, granica, ciągłość i pochodna funkcji jednej zmiennej rzeczywistej, badanie funkcji, czasem też całka Riemanna, o ile starczy czasu, np. nie przepadną wykłady mające się odbyć akurat w dni będące świętami katolicko-państwowymi). Trzeba też dodać, że omawiany materiał jest z konieczności częściową powtórką tego, co mówiono w szkole, ponieważ wielu studentów wybierających kognitywistykę nie ma dobrych wspomnień z lekcji matematyki w szkole. Prowadząc w Poznaniu te zajęcia wedle przedłożonego mi syllabusa wielce żałuję, że nie mogę w danych ramach czasowych opowiedzieć o nieco bardziej zaawansowanych sprawach (np. o równaniach różniczkowych), których znajomość byłaby niezbędna dla rozumienia, co robi się we współczesnych badaniach kognitywnych. Przede wszystkim jednak uważam, że obecny syllabus jest ułomny z powodu braku w nim treści geometrycznych i topologicznych. W przygotowywanym podręczniku chciałbym rozszerzyć program, dodając właśnie te treści. Między innymi dlatego z ciekawością przeczytałem książkę Mateusza Hohola *Foundations of Geometric Cognition*. Mogę z przekonaniem polecić jej lekturę osobom zainteresowanym poznaniem matematycznym.

Geometric cognition from a cognitive point of view

Abstract

This review discusses the content of Mateusz Hohol's new book *Foundations of Geometric Cognition*. Mathematical cognition has until now focused mainly on human numerical abilities. Hohol's work tackles geometric cognition, an issue that has not been described in previous investigations into mathematical cognition. The main strength of the book lies in its critical analysis of a huge amount of results from empirical experiments. The author formulates his theoretical proposals very carefully, avoiding radical and one-sided solutions. He claims that human geometric cognition is based mainly on two core systems, both being phylogenetically hardwired, namely the system of layout geometry and the system of object geometry. The interaction of these systems becomes amplified in the individual development of the mind, which, in turn, is supported by the use of language. The second part of the review contains the reviewer's remarks concerning the history of geometry, experiments related to spatial representations, and the role of geometry in mathematical education.

Keywords

mathematical cognition, spatial representation, Euclidean geometry, core system of layout geometry, core system of object geometry, cognitive history.

Bibliografia

Acerbi, F., 2008. Euclid's Pseudaria. *Archive for History of Exact Sciences* [Online], 62(5), ss. 511–551. Dostępne na: <https://www.jstor.org/stable/41134289> [ostatni dostęp: 2 września 2021].

Brożek, B. i Hohol, M., 2014. *Umysł matematyczny*, seria: *Bramy Nauki*. Kraków: Copernicus Center Press.

Descartes, R., 2015. *Geometria* (P. Błaszczyk i K. Mrówka, Tłum.). Kraków: TAiWPN Universitas.

Euklides, 2013. *Elementy. Ks. 5-6: Teoria proporcji i podobieństwa* (P. Błaszczyk i K. Mrówka, Tłum.). Kraków: Copernicus Center Press.

Hilbert, D., 1899. *Grundlagen der Geometrie*. T. 1, seria: *Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmals in Göttingen*. Leipzig: B.G. Teubner.

Hohol, M., 2013. *Wyjaśnić umysł: struktura teorii neurokognitywnych*. Kraków: Copernicus Center Press.

Hohol, M., 2018. Od przestrzeni do abstrakcyjnych pojęć: W stronę teorii poznania geometrycznego. W: R. Murawski i J. Woleński, red. *Problemy filozofii matematyki i informatyki*, seria: *Seria Matematyka i Informatyka / Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu* 124. Poznań: Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza, ss. 129–143.

Hohol, M. i Miłkowski, M., 2019. Cognitive Artifacts for Geometric Reasoning. *Foundations of Science* [Online], 24(4), ss. 657–680. Dostępne na: https://doi.org/10.1007/s10699-019-09603-w [ostatni dostęp: 2 września 2021].

Klein, F., 1872. *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forsuchungen* [Online]. Erlangen: Verlag von Andreas Deichert. Dostępne na: <http://books.google.com/books?id=CVwJ0PuwK2wC> [ostatni dostęp: 2 września 2021].

Lakoff, G. i Núñez, R.E., 2000. *Where Mathematics Comes from: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*. New York: Basic Books.

Netz, R., 1999. *The Shaping of Deduction in Greek Mathematics*. Cambridge: Cambridge University Press.

Tarski, A., 1929. Les fondements de la géométrie des corps. *Księga pamiątkowa pierwszego Polskiego Zjazdu Matematycznego, Lwów, 7-10, IX 1927: dodatek do "Annales de la Société Polonaise de Mathématique"*. Kraków: Czcionkami Drukarni Uniwersytetu Jagiellońskiego pod zarządem Józefa Filipowskiego, ss. 29–33.

Tinbergen, N., 1963. On aims and methods of Ethology. *Zeitschrift für Tierpsychologie* [Online], 20(4), ss. 410–433. Dostępne na: https://doi.org/10.1111/j.1439-0310.1963.tb01161.x [ostatni dostęp: 2 września 2021].