

# Biopsychologiczne podstawy poznania geometrycznego\*

Mateusz Hohol

Sekcja Kognitywistyki, Instytut Filozofii i Socjologii PAN;  
Centrum Kopernika Badań Interdyscyplinarnych

## Biopsychological foundations of geometric cognition

Abstract

In this review-paper, I focus on biopsychological foundations of geometric cognition. Starting from the Kant's views on mathematics, I attempt to show that contemporary cognitive scientists, alike the famous philosopher, recognize mutual relationships of visuospatial processing and geometric cognition. What I defend is a claim that Tinbergen's explanatory questions are the most fruitful tool for explaining our "hardwired," and thus shared with other animals, Euclidean intuitions, which manifest themselves in spatial navigation and shape recognition. I claim, however, that these "hardwired intuitions" cannot capture full-blooded Euclidean geometry, which demands practice with cultural artifacts in various time-scales.

---

\* Niniejszy artykuł powstał w ramach grantu „Mechanizmy poznania geometrycznego” (2015/19/B/HS1/03310) przyznanego mi przez Narodowe Centrum Nauki. Dziękuję za wszystkie cenne uwagi, jakie otrzymałem od uczestników posiedzenia Komisji Filozofii Nauk PAU (Kraków, 18.01.2016), gdzie przedstawiłem wstępną wersję artykułu.

Keywords

cognitive science of mathematics, cognitive maps, cultural artifacts, core cognitive systems, geometric cognition, scientific explanation.

## 1. Wprowadzenie

Zgodnie z tezą Immanuela Kanta, przestrzeń i czas są wewnętrznymi kategoriami ludzkiego umysłu, które są – w pewnym uproszczeniu – „nakładane” na wrażenia zmysłowe. W takim ujęciu czas i przestrzeń organizują poznanie, nie tylko potoczne, ale również poznanie matematyczne. Kategoria przestrzeni, zdaniem Kanta, stanowi podstawę dla geometrii, zaś kategoria czasu dla arytmetyki:

Otóż przestrzeń i czas są tymi danymi naocznymi (*Anschauungen*), które czysta matematyka kładzie u podstaw wszystkich swych poznań i sądów, występujących zarazem jako apodyktyczne i konieczne. Matematyka bowiem musi wszystkie swe pojęcia przedstawić najpierw w naoczności [...]. Geometria kładzie u [swych] podstaw czystą naoczność przestrzeni. Arytmetyka nawet swoje pojęcia liczb wytwarza przez kolejne dołączanie jednostek w czasie (Kant, 1993, s. 34).

Ideę Kanta przejęli i rozwinęli filozoficzni konstruktywiści i intuicjoniści matematyczni (zob. Brouwer, 1975; Dadaczyński, 1999; Urbańczyk, 2014). Co więcej, w ostatnich latach stała się ona inspiracją dla jednego z wiodących programów badawczych w ramach kognitywistyki matematyki, który polega na poszukiwaniu związków, a niekiedy nawet wspólnych mechanizmów, poznawczego przetwarzania czasu i przestrzeni oraz ludzkich zdolności matematycznych (Dehaene i Brannon, 2010). W niniejszym artykule skoncentruję się na

rdzennym, czy też rudymenarnym, poznaniu geometrycznym, wskazując jego podstawy biopsychologiczne oraz ich rolę w przyswajaniu dojrzałej geometrii euklidesowej. Moim celem jest nie tylko identyfikacja, ale również wyjaśnienie naszych naturalnych kompetencji geometrycznych oraz zarysowanie „punktów”, w których modyfikowane są one przez artefakty kulturowe.

Plan niniejszego artykułu przeglądowego jest następujący: w kolejnej sekcji zaprezentuję dwa przypadki rdzennego poznania geometrycznego oraz Tinbergenowską strategię eksplanacyjną. Dalsze części poświęcone będą omówieniu poznawczych badań nad geometrią, a wreszcie aplikacji strategii Tinbergenowskiej do wyjaśnienia rdzennego poznania geometrycznego: omówię systemy umysłowe związane z tym typem poznania, jego ontogenezę, wartość przystosowawczą (ewolucyjną) oraz filogenezę. Pokażę przy tym, że reprezentacje generowane przez wspomniane systemy, które – zgodnie z sugestią Dehaene’a i Brannon (2010) postrzegać można jako kantowskie „pre-rekwizyty” – są konieczne, ale niewystarczające do wejścia człowieka (zarówno w skali ewolucyjnej, jak i ontogenetycznej) w świat matematycznej geometrii euklidesowej.

## **2. Naturalna czułość na geometrię: studia przypadków**

Badając zdolność dorosłych szczurów do reorientacji, Cheng (1986) zastosował następujący paradygmat eksperymentalny: w każdej próbie gryzoń najpierw zapoznawał się z prostokątnym wybiegiem, gdzie w jednym z rogów ukryta była nagroda (pożywienie). Następnie zwierzę było dezorientowane (celem manipulacji było zaburzenie jego wiedzy egocentrycznej). Badaczka interesowało, czy szczur bę-

dzie w stanie odzyskać orientację na podstawie wiedzy allocentrycznej, a w konsekwencji znaleźć nagrodę. Cheng zastosował dwa warunki eksperymentalne: w pierwszym z nich w wybiegu umieszczono wskazówki percepcyjne (różne kolory ścian, zaciemnienie areny, zapach); w drugim warunku wskazówki takie były nieobecne – gryzonie miały do dyspozycji jedynie geometrię wybiegu. Cheng założył, że jeśli szczury potrafią orientować się ze względu na geometrię, nie będą poszukiwać (po dezorientacji) nagrody chaotycznie we wszystkich rogach, ale tylko w poprawnym miejscu albo w – identycznym geometrycznie – rogu po przekątnej. Okazało się, że niezależnie, czy w wybiegu obecne były niegeometryczne wskazówki percepcyjne, czy nie, niewytrenowane zwierzęta istotnie popełniały błędy rotacyjne: nawet gdy wskazówka była wyrazista, nie potrafiły zawęzić poszukiwań do poprawnego rogu (poszukiwały również w przeciwnym), ale nie kierowały swoich poszukiwań na dwa pozostałe rogi. Wykorzystanie wskazówek innych niż geometria do reorientacji w prostokątnym wybiegu wymagało od gryzoni długotrwałego treningu. Wyniki Chenga wskazują, że geometria środowiska stanowi podstawową informację wykorzystywaną przez gryzonie w orientacji przestrzennej. Możliwe jest to dzięki naturalnej czułości na własności geometryczne: odległość (proksymalny-dystalny) oraz kierunek (lewo-prawo).

Wyniki Chenga (1986) zostały zreplikowane (Margules i Gallistel, 1988), a analogiczny paradygmat wykorzystano również w badaniach z udziałem innych zwierząt, w tym także ludzi (zob. przegląd badań w Thinus-Blanc, Chabanne i in., 2010). W jednym z nich Hermer i Spelke (1994; 1996) przebadaly 18–24 miesięczne dzieci oraz dorosłych studentów. Również w tym wypadku zastosowano dwa warunki: w jednym z nich osoby badane mogły korzystać z dodatkowych wskazówek percepcyjnych (ściana pomalowana na niebiesko, zabawkowa ciężarówka, pluszowy miś), w drugim zaś mogły polegać je-

dynie na geometrii prostokątnego pomieszczenia. W tym ostatnim warunku zachowanie osób dorosłych i dzieci było analogiczne do zachowania niewytrenowanych dorosłych szczurów w eksperymencie Chenga: ludzie niezależnie od wieku popełniali błędy rotacyjne, ale nie szukali ukrytego obiektu w dwóch pozostałych rogach. W pierwszym warunku natomiast zaobserwowano, że osoby dorosłe, w przeciwieństwie do dzieci, z łatwością wykorzystywały dodatkową wskazówkę percepcyjną, aby zawęzić poszukiwania jedynie do poprawnego rogu. Dorosłe osoby potrafiły więc wykonywać spontanicznie działanie, które możliwe było dla szczurów tylko po długotrwałym treningu w prostokątnym wybiegu.

Wykorzystanie geometrii środowiska w orientacji przestrzennej nie jest jedynym przejawem naturalnego poznania geometrycznego, obserwowanym u ludzi i u innych zwierząt. W psychologii od dawna badana jest – zarówno ludzka, jak i zwierzęca – zdolność do rozróżniania i rozpoznawania dwuwymiarowych kształtów i niewielkich trójwymiarowych obiektów (Gibson, 1969). Choć specjaliści zajmujący się percepcją wzrokową do niedawna twierdzili, że gryzonie przetwarzają tego typu obiekty wykorzystując cechy niskopoziomowe – szczury wykorzystują do rozróżniania figur geometrycznych raczej lokalną luminancję niż całościowy kształt (Minini i Jeffery, 2006) – wyniki z końca pierwszej dekady XX wieku przeczą temu pogładowi. Jak pokazali Zoccolan i wsp. (2009), szczury potrafią bowiem rozpoznawać tożsamość obiektów wzrokowych pomimo zmiany ich rozmiaru oraz obrotu. Wynik ten wskazuje na zaangażowanie wysokopoziomowych mechanizmów poznawczych, umożliwiających całościowe przetwarzanie kształtu obiektów.

W przypadku ludzi zagadnienie to przebadane zostało dokładnie przez Izard i Spelke (2009) w studium z udziałem 4–10 letnich dzieci oraz osób dorosłych. W każdej próbie zadaniem osób badanych było

wybranie jednej z sześciu prezentowanych L-kształtnych figur, która nie pasuje do pozostałych: pięć figur dzieliło tę samą własność geometryczną, zaś szósta różniła się pod względem długości, kąta lub kierunku. Okazało się, że nawet najmłodsze dzieci, podobnie jak osoby dorosłe, sprawnie przetwarzają kąty i długość, jednak – w przeciwieństwie do dorosłych (zob. Cooper i Shepard, 1973) – nie potrafią rozróżnić figury od jej lustrzanego odbicia, co wskazuje na trudność w wykrywaniu kierunku. Wprawdzie wykonanie prób (zarówno pod względem poprawności odpowiedzi, jak i czasu reakcji) wymagających tej ostatniej zdolności poprawia się z wiekiem, jednak wykorzystanie – zupełnie niedostępnej dla dzieci – geometrycznej własności kierunku sprawia, co widać w czasach reakcji oraz poprawności wykonania, trudność nawet osobom dorosłym. Wyniki Izard i Spelke (2009) sugerują więc, że naturalna czułość na geometrię niewielkich form wzrokowych ogranicza się do własności kątowych i długości. Co więcej, w świetle wyników badań przeprowadzonych przez Dehaene’a i wsp. (2006) z wykorzystaniem tego paradygmatu i z udziałem członków amazońskiego plemienia Mundurucu (dzieci oraz osób dorosłych), powyższe wnioski zdają się mieć charakter ponadkulturowy, co wzmacnia tezę o naturalnym, ale zarazem ograniczonym charakterze rudymenarnego poznania geometrycznego. Omówione w tej sekcji wyniki stanowią *explanandum*, czyli zjawisko domagające się wyjaśnienia.

### 3. Wyjaśnianie w naukach o umyśle i zachowaniu

Większość dyskusji filozoficznych skupionych wokół problematyki wyjaśniania naukowego rozpoczyna się od zreferowania strategii Hempla-Oppenheima (Hempel i Oppenheim, 1948). W takim uję-

ciu wyjaśnienie polega na przeprowadzenia rozumowania, w którym mające treść empiryczną przesłanki stanowią *explanans*, wniosek to *explanandum*, a wśród przesłanek znajduje się przynajmniej jedno prawo przyrody (Grobler, 2006). Stąd też ujęcie to często nazywa się dedukcyjno-nomologicznym. Zgodnie z obiegowym poglądem, o ile strategia Hempła-Oppenheimera dobrze sprawdza się w fizyce (czy ogólniej w dyscyplinach, które formułują prawa), o tyle jej zastosowanie w biologii, psychologii, neuronauce czy kognitywistyce jest w najlepszym wypadku dość ograniczone (Hohol, 2017).

W ostatnich dekadach dominującym poglądem na wyjaśnianie w tych dyscyplinach nauki jest mechanicyzm (czasem dla odróżnienia od idei nowożytnych mówi się o neomechanicyzmie). Choć czołowi zwolennicy tego stanowiska (Bechtel, 2008; Craver i Darden, 2013; Glennan, 2002; Kaplan, 2011; Miłkowski, 2013) różnią się w szczegółach, wszyscy zgadzają się co do tego, że wyjaśnienia mechanistyczne jest formą wyjaśniania przyczynowego, w którym dyspozycja układu złożonego z wielu części (mechanizmu) opisywana jest jako „rezultat oddziaływania między częściami mechanizmu, jego organizacji i zachodzących w nim procesów” (Miłkowski, 2014, s. 153). Wspomnieć należy również o znanej idei Mayra (1961), zgodnie z którą wyjaśnienia w naukach biologicznych odwołują się do czynników bezpośrednich (przyczynowych) oraz ultymatywnych (ewolucyjnych). Idea ta nie jest sprzeczna z (neo)mechanicyzmem – przynajmniej część czynników bezpośrednich wyjaśniana może być bowiem w kategoriach mechanistycznych (Miłkowski, 2016).

W oparciu o podejście Mayra dokonać można dalszych dystynkcji. Prawdopodobnie najbardziej znanego podziału dokonał Tinbergen (1963). Jego zdaniem wyjaśnienie zachowania wymaga odpowiedzi na cztery pytania, dotyczące różnych jego aspektów: (1) „jak to działa?” (pytanie o czynniki przyczynowe), (2) „jak to się rozwija?”

(pytanie o ontogenezę, czy też o rozwój osobniczy), (3) „jak zwiększa to przystosowanie?” (pytanie o wartość adaptacyjną), (4) „jak to wyewoluowało?” (pytanie o filogenezę). O ile pytania (1) oraz (2) odpowiadają Mayrowskim czynnikom bezpośrednim, o tyle pytania (3) i (4) czynnikom ultymatywnym. Przed próbą udzielenia odpowiedzi na te pytania w kontekście omówionych w poprzedniej sekcji studiów przypadków, wspomnieć należy o dwóch kwestiach. Po pierwsze, poszczególne aspekty wyjaśniania wyróżnione przez Tinbergena nie są oparte na ostrych dystynkcjach – możliwe jest więc wskazywanie powiązań między nimi Bateson i Laland, 2013. Po drugie zaś, możliwie pełna odpowiedź na poszczególne pytania wymaga wykorzystania danych z zakresu wielu dziedzin wiedzy: od psychologii i neuronauki poznawczej (pytanie 1), przez psychologię rozwojową (pytanie 2), komparatystykę międzygatunkową (pytanie 3), aż po robotykę kognitywną i behawioralną (pytanie 4). W kolejnej sekcji zajmę się pytaniem pierwszym: przyjrzę się próbom identyfikacji czynników przyczynowych, stojącego za rdzennym poznaniem geometrycznym.

#### 4. Moduł geometryczny i mapy poznawcze

Jeśli chodzi o reorientację gryzoni w przestrzeni na podstawie geometrii otoczenia, sam Cheng (1986), a następnie Gallistel (1990) wyjaśnili tę zdolność postulując – zgodnie z ówczesnym trendem kognitywistyki – istnienie modułu geometrycznego w sensie Fodora (1983). Według Chenga i Gallistela moduł ten charakteryzuje się wąskim zakresem przetwarzania, kodując jedynie obserwowalne własności geometryczne środowiska, które mogą zostać wykorzystane do określania lokalizacji cech oraz obiektów. Nie przetwarza on natomiast informacji z modalności innych niż wzrokowa (np. intensywności za-



pachu), a także nierelevantnych geometrycznie informacji wzrokowych, takich jak tekstura, luminancja czy współczynnik odbicia powierzchni.

Jak wiadomo, Fodor (1983) opisał ludzki umysł jako system złożony z procesów centralnych (czyli niemodularnych wysokopoziomowych struktur odpowiedzialnych za konceptualizację, rozumowanie czy podejmowanie decyzji) oraz modularnych systemów wejść, zwanych powszechnie modułami. Te ostatnie są działającymi, np. na wczesnych stadiach przetwarzania percepcyjnego strukturami, charakteryzującymi się wyspecjalizowaniem dziedziny, ograniczeniami w zakresie przetwarzanych informacji, automatycznością i dużą szybkością działania, płytkością obliczeniową, ustalonymi wzorcami ontogenetycznymi, lokalizacją mózgową oraz – powiązаныmi z tą ostatnią – charakterystycznymi skutkami uszkodzenia. O ile mi wiadomo, nikt nie przeanalizował dotychczas, czy postulowany przez Chenga i Gallistela moduł geometryczny charakteryzuje się wszystkimi cechami podawanymi przez Fodora. Wiadomo jednak, że ów postulowany system jest zbieżny przynajmniej z częścią charakterystyki modularnych struktur poznawczych (jak już widzieliśmy, jego obszar działania jest ograniczony, a działanie modułu ma charakter automatyczny).

Gallistel (1990) opisał działanie modułu geometrycznego w kategoriach obliczeniowych w odniesieniu do ograniczonej ilości parametrów przetwarzanych w czasie rzeczywistym oraz przechowywanych w pamięci. Stąd, jego zdaniem, „mózg zwierzęcia oblicza parametry kształtu, [...] dopasowując je do parametrów odpowiednich regionów mapy [poznawczej – przyp. M.H.]” (s. 178). Istnienie geometrycznych map poznawczych (czy też ramy metrycznej według terminologii Chenga) wyjaśniać ma zdolność wytrenowanych szczurów oraz dorosłych ludzi do wykorzystywania dodatkowych (niege-

ometrycznych) wskazówek percepcyjnych w celu reorientacji w przestrzeni. Odpowiedzialny za tę zdolność moduł geometryczny nie koduje bezpośrednio – o czym już wspomniałem – tych wskazówek, ale określa ich położenie na geometrycznej mapie poznawczej. Jak konkluduje Cheng (1986), „szczur nie używa cech [niegeometrycznych] wskazówek percepcyjnych – M.H.] niezależnie od określonej geometrycznie lokalizacji” (s. 173).

Samo pojęcie map poznawczych, czyli abstrakcyjnych niejęzykowych umysłowych reprezentacji przestrzeni, wprowadzone zostało już w pierwszej połowie XX wieku przez Tolmana (1932; 1948). Badając zachowania szczurów w labiryncie zauważył on, że cechują się one elastycznością poznawczą, której nie sposób wyjaśnić w oparciu o obowiązujący w ówczesnym behawioryzmie czysto asocjacyjny model uczenia się. Ze względu na brak odpowiednich metod badawczych, Tolmanowski postulat istnienia map poznawczych był wówczas jedynie śmiałą hipotezą. Sytuacja uległa zmianie pod koniec lat sześćdziesiątych XX wieku, gdy O’Keefe i jego współpracownicy rozpoczęli badania nad hipokampem (szczególnie nad strukturą CA1) przy użyciu nowatorskich, oczywiście jak na tamte czasy, technik neurofizjologicznych. Zlokalizowali oni pojedyncze neurony, nazywane komórkami miejsca, które aktywowały się jedynie wówczas, gdy szczur znajdował się w określonym punkcie wybiegu. Co więcej, stwierdzili oni, że komórki miejsca rozumieć należy jako neuronalne komponenty Tolmanowskich map poznawczych (O’Keefe i Dostrovsky, 1971; O’Keefe i Nadel, 1978).

Kolejne komponenty tego mechanizmu zlokalizowane w hipokampie i w sąsiadujących strukturach mózgowych, oraz operacje w jakie są one zaangażowane, odkrywane były w kolejnych dekadach, a intensywne badania nad tym zagadnieniem trwają do dziś. W szczególności na początku dwudziestego wieku May-Britt Moser, Edvard

Moser wraz ze wsp. odkryli w korze śródwęchowej komórki, które aktywowały się, gdy szczur znajdował się nie w jednej, jak w przypadku hipokampalnych komórek miejsca, ale w różnych lokalizacjach wybiegu (Fyhn i in., 2014). Kolejne badania pokazały, że aktywacje neuronów śródwęchowych układają się w wierzchołki sześciokąta i reprezentują punkty niewidzialnej siatki kartograficznej środowiska (Hafting i in., 2005). Stąd też badacze nazwali tę klasę neuronów komórkami siatki (ang. *grid cells*). O ile komórki miejsca zdolne są do reprezentowania aktualnej lokalizacji zwierzęcia, o tyle komórki siatki uważa się za kodujące również odległość i kierunek. Dziś wiadomo, że mechanizm map przestrzennych obejmuje także komórki graniczne, komórki kierunku oraz komórki prędkości (zob. niedawną pracę Mosera, Moser i McNaughtona (2017) dla przeglądu badań w ujęciu historycznym oraz mechanistyczną analizę filozoficzną przeprowadzoną przez Billa Bechtela (2016)).

Wracając do samej modularności poznania w sensie Fodora oraz modułu geometrycznego w ujęciu Chenga i Gallstela wypada powiedzieć, że nie przetrwały one próby czasu. Przykładowo, Prinz (2006) zauważa – a jego uwaga zdaje się być ważna także dla poznania geometrycznego – że trudno jest wskazać jakikolwiek system poznawczy, który spełniałby Fodorowskie kryteria. Co więcej, kryteria te nie zawsze są całkowicie rozłączne, a poszczególne z nich, np. płytkość obliczeniowa, rozumiane mogą być na różne sposoby (Beaulac, 2014). Nic więc dziwnego, że z oryginalnej idei Fodora, oraz jej krytyki, wyrosły konkurencyjne teorie modularności oraz takie, w których pomimo utrzymania części charakterystyki modularności, samo pojęcie „modułu” zostało zastąpione innymi, mniej obciążonymi, terminami.

Jeśli zaś chodzi o moduł geometryczny wskazuje się choćby na to, że mający być jego mózgowym „siedliskiem” hipokamp nie jest strukturą służącą jedynie do orientacji przestrzennej ze względu na

geometrię przestrzeni, ale zaangażowaną również w przetwarzanie niegeometrycznych wskazówek percepcyjnych (Sutton i Newcombe, 2014). Dodać wypada, że u kręgowców orientacja w przestrzeni realizowana jest nie tylko w oparciu o wskazówki wzrokowe, ale kluczową rolę dla tej zdolności odgrywa integracja multisensoryczna (Hohol, Baran i in., 2017). Co więcej, sam Cheng (wraz ze współpracownikami) z biegiem lat i przyrostem świadectw empirycznych zmieniał swój punkt widzenia (Cheng, Huttenlocher i Newcombe, 2013). Zasugerował on, że rozumienie modułu powinno zostać osłabione (Cheng i Newcombe, 2005), a nawet, że efekty wyjaśnianie dotychczas przez wysokopoziomowy moduł, wyjaśnić można przy pomocy niskopoziomowych modeli łączenia obrazów, znanych z badań na owadach (Cheng, 2008) (do kwestii tej również wrócę w kolejnej sekcji). I jeszcze ostatni problem: moduł geometryczny dostarcza potencjalnego wyjaśnienia reorientacji przestrzennej, która stanowi jednak, jak widzieliśmy w sekcji drugiej, tylko jeden z przejawów naturalnej czułości na geometrię. Nie mówi natomiast nic o czułości na geometrię małych obiektów wizualnych.

## 5. Rdzenne systemy poznania geometrycznego

Choć zaproponowana przez Chenga idea modułu geometrycznego w sensie Fodora nie przetrwała próby czasu, nie należy zaniedbywać jej roli heurystycznej oraz inspiracji, jaką dostarczyła ona badaczom biopsychologicznych podstaw poznania geometrycznego. O ile w przypadku badań nad poznaniem numerycznym istnieje kilka konkurencyjnych podejść (Dehaene, 2011; Hohol, Cipora i in., 2017; Lakoff i Núñez, 2000), w przypadku geometrii jedyną propozycją, która pretenduje do miana programu badawczego, jest zapropo-

wana i rozwijana przez Spelke i wsp. koncepcja rdzennych systemów (ang. *core system*) poznania geometrycznego (Carey i Spelke, 1996; Dillon, Huang i Spelke, 2013; Spelke, Lee i Izard, 2010). Choć propozycja ta wyrosła z tradycji modułu geometrycznego – w jednym z kluczowych badań omawianych w sekcji drugiej Hermer i Spelke (1996) używają wprost pojęcia modułu – na przestrzeni lat uzyskała własną tożsamość, dystansując się od koncepcji Fodora. Spelke i Kinzler (2007) charakteryzują systemy rdzenne – nie tylko geometryczne – następująco:

Systemy te służą do reprezentowania nieożywionych obiektów i ich mechanicznych interakcji, sprawczych podmiotów [ang. *agents* – przyp. M.H.] i działań nakierowanych na cel, zbiorów i liczbowych relacji uporządkowania, dodawania i odejmowania, a także lokalizacji przestrzennych i ich własności geometrycznych. Każdy z systemów wyposażony jest w system zasad, który służy indywidualizacji obiektów ze swojej dziedziny i wspomaga wnioskowanie na temat zachowania się przedmiotów. Co więcej, każdy system charakteryzuje się zbiorem ograniczeń, które umożliwiają badaczom jego identyfikację pomiędzy zadaniami, grupami wiekowymi, gatunkami oraz kulturami (s. 89).

Choć charakterystyka ta przywodzi na myśl Fodorowskie moduły, systemy rdzenne, jak pisze Horst (2016), „nie są prostymi systemami wczesnego przetwarzania wejść percepcyjnych, ale sposobami konceptualizacji i myślenia o świecie” (s. 54). W tym sensie przypominają one raczej Fodorowskie procesy centralne, a nie moduły. W odróżnieniu od procesów centralnych systemy rdzenne cechują się jednak specjalizacją dziedziny. Wspomnieć trzeba, że istnieją wprawdzie post-Fodorowskie ujęcia modularności, mam tu na myśli przede wszystkim „globalną modularność umysłu” (ang. *Massive Mental*

*Modularity*), przyjmowaną przez część psychologów ewolucyjnych (Samuels, 1998), które godzą ze sobą obydwie te cechy. Idea systemów rdzennych wydaje się jednak samodzielna, choćby dlatego, że zakłada istnienie niewielkiej liczby takich systemów, podczas gdy, jak zauważa Horst (2016), psychologowie ewolucyjni liczbę modułów szacują w setkach.

Zdaniem Spelke, Lee i Izard (2010) poznanie geometryczne „opiera się co najmniej na dwóch starych ewolucyjnie, wczesnych rozwojowo i uniwersalnych kulturowo systemach poznawczych, które wychwytyują informacje o kształcie otaczającego nas świata” (s. 865). Są nimi system geometrii przestrzennej, który wspiera orientację w środowisku oraz system geometrii obiektowej, który umożliwia przetwarzanie małych form wzrokowych oraz ruchomych obiektów. Prócz charakterystyki dziedziny działania, każdy z tych systemów rozpatrywać można pod kątem mózgowej implementacji (choć teoria opiera się głównie na wynikach eksperymentów behawioralnych, ma również podbudowę neuronaukową), przetwarzanych własności euklidesowych oraz ograniczeń.

Pierwszy z systemów – system geometrii przestrzennej – umożliwia abstrakcyjne reprezentowanie przestrzeni niezależnie od nierelevantnych geometrycznie informacji. Koduje on dwie z trzech podstawowych własności Euklidesowych: odległość oraz kierunek. Do jego neuronalnej bazy należą wspomniane przy okazji omawiania modułu geometrycznego: hipokamp i kora śródwęchowa (Moser, Moser i McNaughton, 2017; O’Keefe i Nadel, 1978), ale również struktury, takie jak: potyliczny obszar miejsca (Dilks i in., 2013) i kora retrosplenia (Maguire, 2001). Dzięki systemowi geometrii przestrzennej zwierzę jest w stanie ustalić swoją pozycję w przestrzeni oraz odnieść ją do lokalizacji innych obiektów. System ten nie wykazuje natomiast czułości na trzecią istotną własność geometryczną,

jaką jest kąt. Stąd też rozpoznawanie dwuwymiarowych form wzrokowych leży poza jego zasięgiem. Oznacza to, że choć system ten stanowi źródło intuicji geometrycznych, nie jest wystarczającą bazą całej dojrzałej geometrii euklidesowej. Odwołanie się do rdzennego systemu orientacji przestrzennej nie jest również wystarczające by wyjaśnić elastyczne łączenie informacji geometrycznych i niegeometrycznych wskazówek przestrzennych przez badane przez Spelke i Hermer (1994; 1996) osoby dorosłe (odniosę się do tej kwestii przy okazji pytania o ontogenezę poznania geometrycznego).

System geometrii obiektowej przetwarza natomiast dwuwymiarowe kształty oraz trójwymiarowe ruchome obiekty lub manipulowalne przedmioty. Przetwarzanie to ma również abstrakcyjny charakter, ponieważ jest niezależne od orientacji (obrotu) oraz materiału, z którego zbudowane są obiekty. Bazę mózgową systemu stanowią kora boczna potyliczna, bruzda potyliczno-skroniowa oraz zakręt wrzecionowaty (Grill-Spector, Kourtzi i Kanwisher, 2001; Kourtzi i Kanwisher, 2001). System ten przetwarza dwie z trzech podstawowych własności geometrycznych: długość i kąt. Jest natomiast nieczuły na kierunek, dlatego też nie jest on podstawowym systemem orientacji przestrzennej. Jeśli zaś chodzi o ograniczenia w swojej dziedzinie działania, ze względu na nieczułość na kierunek system geometrii obiektowej nie odróżnia figur (obiektów) od ich lustrzanych odbić. Zdaniem Spelke i wsp. (2010) system ten jest biopsychologiczną podstawą geometrii, ale odwołanie do niego nie jest wystarczające do wyjaśnienia ludzkich praktyk geometrycznych (matematycznych) w całej rozciągłości.

## 6. Ontogeneza poznania geometrycznego

Omówione wyżej niezależne od siebie rdzenne systemy geometryczne cechują się stałym i ponadkulturowym wzorcem wczesnej ontogenezy: ich niezależne działanie zaobserwować można już u ludzkich niemowląt (Dehaene-Lambertz i Spelke, 2015; Wang, Hermer i Spelke, 1999), niezależnie od szerokości geograficznej (Dehaene, Izard i in., 2006). Mówiąc prościej, ale zarazem tracąc na precyzji, systemy te postrzegać można jako wrodzone (Samuels, 2004). Choć owe systemy funkcjonują także w trakcie dorosłego życia jednostki, a generowane przez nie reprezentacje umysłowe (w tym pojęcia) tworzą fundamentalną i stabilną wiedzę o świecie, przedstawione w poprzedniej sekcji ograniczenia mogą zostać przewyżczone w trakcie ludzkiej ontogenezy. Jak piszą Spelke i wsp. (2010): „Dzieci wykraczają poza te ograniczenia i konstruują nowy, bardziej kompletny i ogólny, system reprezentacji geometrycznych, łącząc produktywnie reprezentacje dostarczane przez te systemy” (s. 865).

W kontekście pytania o ontogenezę szczególnie istotne są dwie kwestie: jakiego rodzaju środki umożliwiają konstrukcję nowego systemu reprezentacji geometrycznych – czułego zarówno na długość, kierunek, jak i kąt – oraz na jakim etapie rozwoju, czy też w jakim wieku, do tego dochodzi. Jeśli chodzi o pierwszą kwestię, badacze podkreślają kluczową rolę wykorzystywania przez dzieci artefaktów kulturowych. Zdaniem Spelke i wsp. (2010) ów krok w rozwoju poznawczym dzieci dokonuje się w następujący sposób:

Po pierwsze, dzięki doświadczeniu z obrazkami, skalowanymi modelami i mapami dzieci mogą postrzegać wielkoskalowe układy przestrzenne nie tylko jako środowiska, w których można się orientować, ale również jako układy wizualne, cechujące się charakterystycznymi kształtami, wyznaczanymi



przez kąty [...]. Po drugie, poprzez doświadczenie w fizycznych, jak i mentalnych rotacjach [obiektów lub figur – przyp. M.H.], dzieci oraz osoby dorosłe mogą nabywać zdolność traktowania małych obiektów i form nie tylko jako układów wizualnych o charakterystycznych kształtach, ale układów, które mogą być eksplorowane z różnych perspektyw za pomocą systemów orientacyjnych, umożliwiających stabilne reprezentowanie kierunków (s. 878–879).

Dzieci uczą się rozumieć symboliczną funkcję artefaktów kulturowych w ciągu pierwszych czterech lat życia. Zdolne są więc one do wzbogacenia reprezentacji wielkoskalowych układów przestrzennych o własności kątowe jeszcze przed rozpoczęciem formalnej edukacji matematycznej (Spelke, Gilmore i McCarthy, 2011). Badane przez Hermer i Spelke (1994) dzieci w wieku 18–24 miesięcy były natomiast zbyt mało dojrzałe, by połączyć informacje na temat geometrii prostokątnego pokoju oraz niegeometryczne wskazówki percepcyjne, ponieważ polegały na reprezentacjach generowanych *niezależnie* przez obydwa systemy rdzenne. Stąd popełniały one – podobnie jak niewytrenowane szczury – błędy rotacyjne. Ze względu na brak produktywnego łączenia dwóch typów reprezentacji w badaniu Izard i Spelke (2009), dzieci nie potrafiły natomiast wykryć figury, która różni się od pozostałych lustrzanym odbiciem (polegały jedynie na systemie geometrii obiektowej, który pozostaje nieczuły na kierunek).

Landau i Lakusta (2009) wskazują ponadto, że przejście ontogenetyczne między reprezentacjami generowanymi przez systemy rdzenne, a kompletniejszym i ogólniejszym geometrycznym systemem pojęciowym, wspomagane jest przez doświadczenie językowe, w szczególności posługiwanie się frazami charakteryzującymi relacje przestrzenne (zob. także Amalric i in., 2017). W kontekście po-

znania geometrycznego doświadczenie językowe zdaje się posiadać przynajmniej jeszcze jedną ważną funkcję. Choć jak widzieliśmy reprezentacje generowane przez systemy rdzenne cechują się pewnym stopniem abstrakcyjności, kodowanie i późniejsze przetwarzanie nabywanych w trakcie szkolnej nauki pojęć matematycznych, cechujących się najwyższym stopniem abstrakcyjności i ogólności („trójkąt równoboczny”, „kąt ostry”, „wielokąt foremny”) odbywa się najprawdopodobniej w sposób amodalny (Dove, 2014). Zgodne jest to z podejściem, które wskazuje, że ze względu na swoje własności reprezentacyjno-obliczeniowe język stanowi środek rozszerzający naturalne, z reguły „konkretne”, zdolności poznawcze (Clark, 2006; zob. Hohol, 2018 dla aplikacji tej hipotezy do ontogenezy poznania geometrycznego).

## 7. Wartość adaptacyjna i filogeneza rdzennego poznania geometrycznego

Jak wskazałem już w sekcji piątej, rdzenne systemy geometrii i przestrzennej i obiektowej są stare ewolucyjnie (filogenetycznie), o czym świadczą choćby analogiczne wzorce zachowań (tj. błędy rotacyjne oraz zdolność do rozróżniania kształtów) obserwowane u gryzoni i ludzkich niemowląt. Zgodnie ze strategią proponowaną przez Tinbergena (1963) powinno się rozpatrywać osobno dwie kwestie ewolucyjne: przebieg filogenezy oraz wartość adaptacyjną, jaką niesie ze sobą dane zachowanie (i powiązany z nim program umysłowy).

Odpowiedź na pytanie o filogenezę wymaga czegoś więcej aniżeli opowiedzenia historii na temat korzyści, jakie systemy te *mogły* w dalekiej przeszłości dawać naszym zwierzęcym przodkom (za takie podejście krytykowana jest zresztą często psychologia ewolu-

cyjna; por. (Hohol i Wołoszyn, 2016)). Trzeba się odnieść natomiast do ponadczasowych, a więc i współczesnych, problemów adaptacyjnych, jakie rozwiązują te systemy (Miłkowski, 2016). Odpowiedź na pytanie o filogenezę wymaga zaś uwzględnienia wyników badań z zakresu komparatystyki międzygatunkowej (Vallortigara, 2012). Ewolucyjną analizę obydwu systemów rdzennych przeprowadzić można w podobny sposób, ale ze względów ekonomicznych odnieść się powinno jedynie do systemu geometrii przestrzennej.

Choć w warunkach eksperymentalnych orientacja ze względu na geometrię środowiska prowadzi do popełniania błędów rotacyjnych, w warunkach naturalnych zdaje się być ona strategią stabilniejszą niż kierowanie się punktami orientacyjnymi. Wyobraźmy sobie (pomijając trafność biologiczną) zwierzę, które powracając z miejsca polowania kieruje się do gniazda ze względu na wyraźny percepcyjnie obiekt, np. drzewo. Strategia taka może być skuteczna, dopóki drzewo to nie ulegnie zniszczeniu, np. ze względu na uderzenie pioruna. Co więcej, istotne dla trafienia z powrotem do gniazda drzewo może nie różnić się wystarczająco od innych drzew. Taka strategia może prowadzić więc do dezorientacji. Nawet jeśli wskazówka percepcyjna w typowych warunkach atmosferycznych jest wyrazista, zmiana tych warunków (np. opad śniegu) może zatrzeć wyrazistość i uniemożliwić odróżnienie jej od innych obiektów obecnych w środowisku. Całościowy układ przestrzenny środowiska jest natomiast mniej podatny na zmiany w czasie, a jego wyrazistość nie zmniejsza się drastycznie wraz ze zmianą warunków atmosferycznych. Spekulować można zatem, że dobór naturalny faworyzował kierowanie się geometrią środowiska w porównaniu do orientacji ze względu na znajdujące się w środowisku obiekty (Spelke, Lee i Izard, 2010). Adaptacyjną wartość tej strategii potwierdzają wyniki badań z zakresu robotyki behawioralnej i kognitywnej, w których wykorzystuje się wyidealizowane, ale re-

alistyczne biologicznie, roboty, których zadaniem jest orientowanie się w środowisku (Gee i in., 2008; Milford i Wyeth, 2008; Sheynikhovich i in., 2009; Thrun, Burgard i Fox, 2005). Wyniki tych badań wskazują, że orientacja ze względu na geometrię przestrzenną jest nie tylko mniej zawodna, ale również bardziej ekonomiczna obliczeniowo w porównaniu z orientacją ze względu na obiekty.

Jeśli zaś chodzi o filogenezę czułości na geometrię środowiska i wykorzystanie jej w nawigacji, przeprowadzono dotychczas badania z udziałem różnych gatunków gryzoni, takich jak chomiki (Poucet i in., 1986), myszokoczki (Thinus-Blanc i Ingle, 1985) czy myszy (Ammassari-Teule i in., 1995), które wskazują na istnienie dyspozycji behawioralnych podobnych do odkrytych przez Chenga (1986) u szczurów. Zdolność do orientacji ze względu na geometrię środowiska zaobserwowano także u innych, i zamieszkujących inne nisze, gatunków zwierząt, m.in.: kurczaków (Tomassi, Vallortigara i Zanforlin, 1997), gołębi (Kelly i Spetch, 2001), ryb ksenotoków (Sovrano, Bisazza i Vallortigara, 2002) i innych ryb akwariowych (Vargas i in., 2004), a także naczelnych różnych od człowieka, w szczególności pawianów (Gouteux, Vauclair i Thinus-Blanc, 1999) i rezusów (Gouteux, Thinus-Blanc i Vauclair, 2001). Choć gatunki te różnią się pod względem elastyczności w łączeniu wskazówek geometrycznych i niegeometrycznych w orientacji, wszystkie z nich przejawiają czułość na geometrię środowiska. Wnioskować można zatem, że licząca co najmniej dziesiątki milionów lat czułość na geometrię wspólna jest wszystkim kręgowcom.

Większe kontrowersje budzi natomiast rdzenne poznanie geometryczne bezkręgowców, a w szczególności owadów. Jak już wspomniałem przy okazji trudności związanych z ideą modułu geometrycznego, w dziedzinie badań nad zachowaniami owadów „standardowo” przyjmuje się, że ich nawigacja przestrzenna nie wykorzystuje

zintegrowanych reprezentacji, takich jak mapy, ale opiera się na prostych mechanizmach, np. łączenia obrazów piksel-po-piksela (Cartwright i Collett, 1983; Wehner i Räber, 1979; Wystrach i in., 2011). W ostatnich latach w literaturze wskazuje się jednak, że miniaturowe układy nerwowe owadów zdolne są do wykorzystania znacznie bardziej zaawansowanych poznawczo strategii orientacyjnych, obejmujących integrację multisensoryczną (Hohol, Baran i in., 2017), a nawet – w przypadku pszczoł i trzmieli – operowanie na mapach poznawczych (Lee i Vallortigara, 2015; Menzel i in., 2005). Na obecną chwilę kwestia ta zdaje się być jednak nierozstrzygnięta (Cruse i Wehner, 2011; Webb, 2012).

## 8. Podsumowanie

Truizmem jest stwierdzenie, że choć zwierzęta, a przynajmniej kręgowce, wyposażone są w rdzenne systemy poznania geometrycznego, tylko człowiek napisał i jest w stanie pojąć *Elementy*. Chociaż ludzie przychodzą na świat z systemami poznawczymi, których przejawy obserwować można u innych naczelnych, szczerów, ryb i ptaków, i które dostarczają im rudymetrycznych intuicji geometrycznych, teza, że wszystkie zdolności poznawcze umożliwiające posługiwanie się matematyczną geometrią euklidesową są wrodzone, jest w świetle wyników omawianych badań fałszywa.

Przyswajanie w trakcie szkolnej edukacji pojęć geometrycznych oraz wykorzystywanie ich w rozumowaniach wymaga uprzednich doświadczeń z artefaktami kulturowymi – w szczególności z mapami, skalowanymi modelami oraz językiem, charakteryzującym relacje przestrzenne. Artefakty te umożliwiają przewycięzenie reprezentacyjnych ograniczeń rdzennych systemów geometrycznych, pro-

wadząc do konstrukcji nowego systemu zdolnego do elastycznej reprezentacji odległości, kierunków oraz kątów. Oznacza to, że w ontogenetycznej skali czasu Kantowskie „prerekwizyty” są konieczne, ale niewystarczające, do wejścia dzieci w świat geometrii euklidesowej. Wydają się one niewystarczające również i w skali filogenetycznej: choć systemy rdzenne reprezentują informacje w sposób abstrakcyjny, dopiero unikalnie ludzka kompetencja językowa umożliwia przeprowadzanie rozumowań z wykorzystaniem pojęć abstrakcyjnych.

## Bibliografia

- Amalric, M., Wang, L., Pica, P., Figueira, S., Sigman, M. i Dehaene, S., 2017. The language of geometry: Fast comprehension of geometrical primitives and rules in human adults and preschoolers. *PLoS Computational Biology*, 13(1), e1005273–31.
- Ammassari-Teule, M., Tozzi, A., Rossi-Arnaud, C., Save, E. i Thinus-Blanc, C., 1995. Reactions to spatial and nonspatial change in two inbred strains of mice: Further evidence supporting the hippocampal dysfunction hypothesis in the DBA/2 strain. *Psychobiology*, 23(4), ss. 284–289.
- Bateson, P. i Laland, K.N., 2013. Tinbergen’s four questions: an appreciation and an update. *Trends in Ecology & Evolution*, 28(12), ss. 712–718.
- Beaulac, G., 2014. Back to the Fodor-modules: The modularity of mind revisited. *Proceedings of the Annual Meeting of the Cognitive Science Society*, 36, ss. 1904–1910.
- Bechtel, W., 2008. *Mental mechanisms: Philosophical perspectives on cognitive neuroscience*. New York: Routledge.
- Bechtel, W., 2016. Investigating neural representations: the tale of place cells. *Synthese*, 193(5), ss. 1287–1321.
- Brouwer, L.E.J., 1975. *Philosophy and foundations of mathematics: L.E.J. Brouwer collected works*. New York: North-Holland Publishing Company.

- Carey, S. i Spelke, E.S., 1996. Science and core knowledge. *Philosophy of Science*, 63(4), ss. 515–533.
- Cartwright, B.A. i Collett, T.S., 1983. Landmark learning in bees. *Journal of Comparative Physiology A: Sensory, Neural, and Behavioral Physiology*, 151(4), ss. 521–543.
- Cheng, K., 1986. A purely geometric module in the rat's spatial representation. *Cognition*, 23(2), ss. 149–178.
- Cheng, K., 2008. Whither geometry? Troubles of the geometric module. *Trends in Cognitive Sciences*, 12(9), ss. 355–361.
- Cheng, K., Huttenlocher, J. i Newcombe, N.S., 2013. 25 years of research on the use of geometry in spatial reorientation: a current theoretical perspective. *Psychonomic Bulletin & Review*, 20(6), ss. 1033–1054.
- Cheng, K. i Newcombe, N.S., 2005. Is there a geometric module for spatial orientation? Squaring theory and evidence. *Psychonomic Bulletin & Review*, 12(1), ss. 1–23.
- Clark, A., 2006. Language, embodiment, and the cognitive niche. *Trends in Cognitive Sciences*, 10(8), ss. 370–374.
- Cooper, L.A. i Shepard, R.N., 1973. Chronometric studies of the rotation of mental images. W: Chase, W.G. red. *Visual Information Processing: Proceedings*. New York: Academic Press, ss. 75–176.
- Craver, C.F. i Darden, L., 2013. *In search of mechanisms*. Chicago: University of Chicago Press.
- Cruse, H. i Wehner, R., 2011. No need for a cognitive map: decentralized memory for insect navigation. *PLoS Computational Biology*, 7(3), e1002009.
- Dadaczyński, J., 1999. Filozofia matematyki Immanuela Kanta i jej dziedzictwo. *Zagadnienia Filozoficzne w Nauce*, 24, ss. 26–42.
- Dehaene-Lambertz, G. i Spelke, E.S., 2015. The infancy of the human brain. *Neuron*, 88(1), ss. 93–109.
- Dehaene, S., 2011. *The number sense*. Revised. Oxford: Oxford University Press.
- Dehaene, S. i Brannon, E.M., 2010. Space, time, and number: a Kantian research program. *Trends in Cognitive Sciences*, 14(12), ss. 517–519.

- Dehaene, S., Izard, V., Pica, P. i Spelke, E.S., 2006. Core knowledge of geometry in an Amazonian indigene group. *Science*, 311(5579), ss. 381–384.
- Dilks, D.D., Julian, J.B., Paunov, A.M. i Kanwisher, N., 2013. The occipital place area is causally and selectively involved in scene perception. *The Journal of Neuroscience*, 33(4), ss. 1331–1336.
- Dillon, M.R., Huang, Y. i Spelke, E.S., 2013. Core foundations of abstract geometry. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 110(35), ss. 14191–14195.
- Dove, G., 2014. Thinking in words: Language as an embodied medium of thought. *Topics in Cognitive Science*, 6(3), ss. 371–389.
- Fodor, J.A., 1983. *The modularity of mind*. Cambridge, MA: The MIT Press.
- Fyhn, M., Molden, S., Witter, M.P., Moser, E.I. i Moser, M.-B., 2014. Spatial representation in the entorhinal cortex. *Science*, 305, ss. 1258–1264.
- Gallistel, C.R., 1990. *The organization of learning*. Cambridge, MA: MIT Press.
- Gee, A.P., Chekhlov, D., Calway, A. i Mayol-Cuevas, W., 2008. Discovering higher level structure in visual SLAM. *IEEE Transactions on Robotics*, 24(5), ss. 980–990.
- Gibson, E.J., 1969. *Principles of perceptual learning and development*. New York: Appleton Century Crofts.
- Glennan, S., 2002. Rethinking mechanistic explanation. *Philosophy of Science*, 69(S3), S342–S353.
- Gouteux, S., Thinus-Blanc, C. i Vauclair, J., 2001. Rhesus monkeys use geometric and nongeometric information during a reorientation task. *Journal of Experimental Psychology. General*, 130(3), ss. 505–519.
- Gouteux, S., Vauclair, J. i Thinus-Blanc, C., 1999. Reaction to spatial novelty and exploratory strategies in baboons. *Animal Learning & Behavior*, 27(3), ss. 323–332.
- Grill-Spector, K., Kourtzi, Z. i Kanwisher, N., 2001. The lateral occipital complex and its role in object recognition. *Vision Research*, 41(10-11), ss. 1409–1422.
- Grobler, A., 2006. *Metodologia nauk*. Kraków: Aureus-Znak.



- Hafting, T., Fyhn, M., Molden, S., Moser, M.-B. i Moser, E.I., 2005. Microstructure of a spatial map in the entorhinal cortex. *Nature*, 436(7052), ss. 801–806.
- Hempel, C.G. i Oppenheim, P., 1948. Studies in the logic of explanation. *Philosophy of Science*, 15(2), ss. 135–175.
- Hermer, L. i Spelke, E.S., 1994. A geometric process for spatial orientation in young children. *Nature*, 370(3), ss. 57–59.
- Hermer, L. i Spelke, E.S., 1996. Modularity and development: the case of spatial reorientation. *Cognition*, 61(3), ss. 195–232.
- Hohol, M., 2017. *Wyjaśnić umysł: Struktura teorii neurokognitywnych*. 2 wyd. Kraków: Copernicus Center Press.
- Hohol, M., 2018. Od przestrzeni do abstrakcyjnych pojęć: W stronę teorii poznania geometrycznego. W: Murawski, R. i Woleński, J. red. *Problemy filozofii matematyki i informatyki*. Poznań: Wydawnictwo Naukowe UAM, ss. 29–143.
- Hohol, M., Baran, B., Krzyżowski, M. i Francikowski, J., 2017. Does spatial navigation have a blind-spot? Visiocentrism is not enough to explain the navigational behavior comprehensively. *Frontiers in Behavioral Neuroscience*, 11(154).
- Hohol, M., Cipora, K., Willmes, K. i Nuerk, H.-C., 2017. Bringing back the balance: domain-general processes are also important in numerical cognition. *Frontiers in Psychology*, 8(499), ss. 17–5.
- Hohol, M. i Wołoszyn, K., 2016. Ewolucja umysłu. W: Heller, M. i Źyckiński, J. red. *Dylematy ewolucji*. Kraków: Copernicus Center Press, ss. 293–310.
- Horst, S., 2016. *Cognitive pluralism*. Cambridge: MIT Press.
- Izard, V. i Spelke, E.S., 2009. Development of sensitivity to geometry in visual forms. *Human Evolution*, 23(3), ss. 213–248.
- Kant, I., 1993. *Prelogomena do wszelkiej przyszłej metafizyki, która będzie mogła wystąpić jako nauka*. Warszawa: PWN.
- Kaplan, D.M., 2011. Explanation and description in computational neuroscience. *Synthese*, 183(3), ss. 339–373.

- Kelly, D.M. i Spetch, M.L., 2001. Pigeons encode relative geometry. *Journal of Experimental Psychology: Animal Behavior Processes*, 27(4), ss. 417–422.
- Kinzler, K.D. i Spelke, E.S., 2007. Core systems in human cognition. *Progress in Brain Research*, 164, ss. 257–264.
- Kourtzi, Z. i Kanwisher, N., 2001. Representation of perceived object shape by the human Lateral Occipital Complex. *Science*, 293(2001), ss. 1506–1509.
- Lakoff, G. i Núñez, R.E., 2000. *Where mathematics comes from: How the Embodied Mind Brings Mathematics Into Being*. New York: Basic Books.
- Landau, B. i Lakusta, L., 2009. *Spatial representation across species: geometry, language, and maps*. Johns Hopkins University, Baltimore, MD, (sprawozdanie techniczne).
- Lee, S.A. i Vallortigara, G., 2015. Bumblebees spontaneously map location of conspecific using geometry and features. *Learning and Motivation*, 50, ss. 32–38.
- Maguire, E.A., 2001. The retrosplenial contribution to human navigation: A review of lesion and neuroimaging findings. *Scandinavian Journal of Psychology*, 42(3), ss. 225–238.
- Margules, J. i Gallistel, C., 1988. Heading in the rat: Determination by environmental shape. *Animal Learning & Behavior*, 16(4), ss. 404–410.
- Mayr, E., 1961. Cause and effect in biology. *Science*, 134(3489), ss. 1501–1506.
- Menzel, R., Greggers, U., Smith, A., Berger, S., Brandt, R., Brunke, S., Bunderock, G., Hulse, S., Plumpe, T., Schaupp, F., Schuttler, E., Stach, S., Stindt, J., Stollhoff, N. i Watzl, S., 2005. Honey bees navigate according to a map-like spatial memory. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 102(8), ss. 3040–3045.
- Milford, M.J. i Wyeth, G.F., 2008. Mapping a suburb with a single camera using a biologically inspired SLAM system. *IEEE Transactions on Robotics*, 24(5), ss. 1038–1053.
- Milkowski, M., 2013. *Explaining the computational mind*. Cambridge, MA: MIT Press.

- Miłkowski, M., 2014. Wyjaśnianie w kognitywistyce. *Przegląd Filozoficzny – Nowa Seria*, 2(86), ss. 151–166.
- Miłkowski, M., 2016. Function and causal relevance of content. *New Ideas in Psychology*, 40(Part A), ss. 94–102.
- Minini, L. i Jeffery, K.J., 2006. Do rats use shape to solve “shape discriminations”? *Learning & Memory*, 13(3), ss. 287–297.
- Moser, E.L., Moser, M.-B. i McNaughton, B.L., 2017. Spatial representation in the hippocampal formation: a history. *Nature*, 20(11), ss. 1448–1464.
- O’Keefe, J. i Dostrovsky, J., 1971. The hippocampus as a spatial map: Preliminary evidence from unit activity in the freely-moving rat. *Brain Research*, 34(1), ss. 171–175.
- O’Keefe, J. i Nadel, L., 1978. *The hippocampus as a cognitive map*. Oxford: Oxford University Press.
- Poucet, B., Chapuis, N., Durup, M. i Thinus-Blanc, C., 1986. A study of exploratory behavior as an index of spatial knowledge in hamsters. *Animal Learning & Behavior*, 14(1), ss. 93–100.
- Prinz, J.J., 2006. Is the mind really modular? W: Standton, R.J. red. *Contemporary debates in cognitive science*. Malden: Wiley-Blackwell.
- Samuels, R., 1998. Evolutionary psychology and the massive modularity hypothesis. *The British Journal for the Philosophy of Science*, 49, ss. 575–602.
- Samuels, R., 2004. Innateness in cognitive science. *Trends in Cognitive Sciences*, 8(3), ss. 136–141.
- Sheynikhovich, D., Chavarriaga, R., Strösslin, T., Arleo, A. i Gerstner, W., 2009. Is there a geometric module for spatial orientation? Insights from a rodent navigation model. *Psychological Review*, 116(3), ss. 540–566.
- Sovrano, V.A., Bisazza, A. i Vallortigara, G., 2002. Modularity and spatial reorientation in a simple mind: encoding of geometric and nongeometric properties of a spatial environment by fish. *Cognition*, 85(2), B51–B59.
- Spelke, E.S., Gilmore, C.K. i McCarthy, S., 2011. Kindergarten children’s sensitivity to geometry in maps. *Developmental Science*, 14(4), ss. 809–821.
- Spelke, E.S., Lee, S.A. i Izard, V., 2010. Beyond core knowledge: Natural geometry. *Cognitive Science*, 34(5), ss. 863–884.

- Sutton, J.E. i Newcombe, N.S., 2014. The hippocampus is not a geometric module: processing environment geometry during reorientation. *Frontiers in Human Neuroscience*, 8, s. 244.
- Thinus-Blanc, C., Chabanne, V., Tomassi, L., Peruch, P. i Vauclair, J., 2010. The encoding of geometry in various vertebrate species. W: Dolins, F.L. i Mitchell, R.W. red. *Spatial cognition, spatial perception*. Cambridge: Cambridge University Press, ss. 99–116.
- Thinus-Blanc, C. i Ingle, D., 1985. Spatial behavior in gerbils (*Meriones unguiculatus*). *Journal of Comparative Psychology*, 99(3), ss. 311–315.
- Thrun, S., Burgard, W. i Fox, D., 2005. *Probabilistic robotics*. Cambridge, MA: The MIT Press.
- Tinbergen, N., 1963. On aims and methods of ethology. *Zeitschrift für Tierpsychologie*, 20(3), ss. 410–433.
- Tolman, E.C., 1932. *Purposive behavior in animals and man*. Berkeley, CA: University of California Press.
- Tolman, E.C., 1948. Cognitive maps in rats and men. *Psychological Review*, 55(4), ss. 189–208.
- Tomassi, L., Vallortigara, G. i Zanforlin, M., 1997. Young chickens learn to localize the centre of a spatial environment. *Journal of Comparative Physiology A: Sensory, Neural, and Behavioral Physiology*, 180(5), ss. 567–572.
- Urbańczyk, P., 2014. Geneza intuicjonistycznego rachunku zdań i Twierdzenie Gliwienki. *Zagadnienia Filozoficzne w Nauce*, 56, ss. 33–56.
- Vallortigara, G., 2012. Core knowledge of object, number, and geometry: A comparative and neural approach. *Cognitive Neuropsychology*, 29(1–2), ss. 213–236.
- Vargas, J.P., López, J.C., Salas, C. i Thinus-Blanc, C., 2004. Encoding of geometric and featural spatial information by Goldfish (*Carassius auratus*). *Journal of Comparative Psychology*, 118(2), ss. 206–216.
- Wang, R.F., Hermer, L. i Spelke, E.S., 1999. Mechanisms of reorientation and object localization by children: A comparison with rats. *Behavioral Neuroscience*, 113(3), ss. 475–485.

- Webb, B., 2012. Cognition in insects. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series B, Biological Sciences*, 367(1603), ss. 2715–2722.
- Wehner, R. i Räber, F., 1979. Visual spatial memory in desert ants, *Cataglyphis bicolor* (Hymenoptera: Formicidae). *Experientia*, 35(12), ss. 1569–1571.
- Wystrach, A., Cheng, K., Sosa, S. i Beugnon, G., 2011. Geometry, features, and panoramic views: Ants in rectangular arenas. *Journal of Experimental Psychology: Animal Behavior Processes*, 37(4), ss. 420–435.
- Zoccolan, D., Oertel, N., DiCarlo, J.J. i Cox, D.D., 2009. A rodent model for the study of invariant visual object recognition. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 106(21), ss. 8748–8875.