Czy wiemy dlaczego czasoprzestrzeń na dużych skalach jest gładka i 4-wymiarowa?

Jerzy Król

Uniwersytet Śląski, Instytut Fizyki

How do we know that physical spacetime in cosmology is smooth and 4-dimensional?

Abstract

Even though the description of the universe in cosmology, is known to be given by a smooth 4-dimensional Lorentz manifold for energies below Planck scale, one still can ask about the origins of this phenomenon. In this paper we show that mathematics used for description of quantum systems at micro scale determines smoothness of spacetime at large cosmological scales and indicates the dimension 4 as the only possible dimension for spacetime.

Keywords

quantum mechanics; Boolean-valued models of set theory; exotic smoothness on R4

1. Wprowadzenie

Ogólna teoria względności Einsteina (OTW) opisuje wszechświat fizyczny w największych skalach jako rozmaitość różniczkowalną z metryką Lorentza. Równania OTW można konsystentnie formułować w dowolnej liczbie wymiarów. Zacznijmy opis ewolucji wszechświata od stanu kwantowego. Nie znamy obecnie poprawnej teorii kwantowej grawitacji, która opisywałaby precyzyjnie taki początkowy stan ewolucji. Przyjmujemy, że początkowa osobliwość grawitacyjna ma naturę kwantową opisywaną strukturą pewnej przestrzeni Hilberta stanów $\mathcal{H}$. Jest to ośrodkowa zespolona przestrzeń Hilberta, która, jeśli ma reprezentować relacje nieoznaczoności pęd-położenie, musi być nieskończenie wymiarowa. Takie podejście nie jest wyjaśnieniem natury i struktury początkowej osobliwości, jednak jej kwantowy charakter jest formalnie reprezentowany kratą rzutowań $\mathbb{L}$ wyznaczoną przez $\mathcal{H}$. Krata $(\mathbb{L}, \wedge, \vee)$ jest strukturą niedystrybutywną, względem $\wedge$ i $\vee$ jako działań inf i sup definiujących kratę. Odzwierciedla to fakt, że rzutowania na podprzestrzenie domknięte, liniowe w $\mathcal{H}$, rozpinające $\mathbb{L}$, są, w ogólności, nieprzemienne. Możemy jednak wybrać maksymalne zbiory komutujących rzutowań. Takie zbiory generują algebry Boole'a B komutujących operatorów samosprzężonych. Mianowicie, każdy operator samosprzężony A na przestrzeni $\mathcal{H}$ w rozkładzie spektralnym zapisuje się jako

$$A = \int_{\lambda} \lambda \cdot P_{\lambda},\ P_{\lambda} \in B \tag{1}$$

Rzutowania P_λ należy rozumieć jako wartości miary spektralnej dE_λ na spektrum operatora A względem której całkujemy. Mówimy wtedy, że operatory A reprezentowane przez całkę (1) są też w B i piszemy $A \in B$. Okazuje się, że zachodzi ważny lemat.

Lemat 1 (Takeuti, 1978). *Dla każdej rodziny* $\{A_\alpha | \alpha \in \mathrm{I}\}$ *, komutujących operatorów samosprzężonych na $\mathcal{H}$, istnieje zupełna algebra Boole'a rzutowań B, taka, że*

$$A_\alpha = \int \lambda dE_\alpha^\lambda$$

i dla każdego $\quad \forall \alpha \in I(dE_\alpha^\lambda \in B).$

Maksymalne algebry Boole'a rzutowań wybranych z kraty $\mathbb{L}$ odgrywają kluczową rolę w rozumieniu wielkoskalowej struktury różniczkowej wszechświata. Spróbujmy wyjaśnić to pokrótce.

Po pierwsze, mówienie o strukturze różniczkowej wszechświata odwołuje się do parametryzacji osiami liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ – opis lokalny przez n-wymiarowe produkty $\mathbb{R}^n$ zakłada już istnienie osi $\mathbb{R}$. Czy jednak oś liczb rzeczywistych jest niezmienna i taka sama w czasie całej ewolucji wszechświata od pierwotnego stanu kwantowego w mikroskali do kosmologicznych skali zdominowanych klasyczną grawitacją? Możemy oczywiście przyjąć, że tak jest. Czy jednak fakt występowania istotnych trudności w budowaniu modeli kosmologicznych ekspandującego wszechświata (np. problem stałej kosmologicznej i ciemnej energii) pozwala na bezkrytyczne odwoływanie się do absolutnego obiektu liczb rzeczywistych? Czy, zatem, faktycznie obiekt $\mathbb{R}$ jest matematycznie niezmienny? Oznaczałoby to absolutność osi $\mathbb{R}$ zarówno w opisie reżimu kwantowego, jak i skal właściwych dla OTW. A może matematyka mechaniki kwantowej wyróżnia $\mathbb{R}_{QM}$ a wielkoskalowy wszechświat $\mathbb{R}$ i $\mathbb{R}_{QM} \neq \mathbb{R}$?

2. Oś liczb rzeczywistych w reżimie kwantowym i w OTW

Zacznijmy od wielkoskalowego modelu czasoprzestrzeni. Jest to w ogólności n-wymiarowa rozmaitość Lorentza, której struktura różniczkowa jest lokalnie modelowana przez $\mathbb{R}^n$. Wiemy, że świat fizyczny wyróżnia $n = 4$. Oś $\mathbb{R}$ pojawiająca się tutaj jest „ciałem algebraicznym, domkniętym, uporządkowanym” (CADU). Teoria formalna opisująca CADU jest 2-go rzędu i kategoryczna w $\aleph_1$. To ostatnie oznacza, że wszystkie modele CADU mocy kontinuum są izomorficzne. Zatem istnieje jeden model mocy kontinuum (z dokładnością do izomorfizmu). Teoria zbiorów opisująca większość konstrukcji matematycznych i leżąca u podstaw matematyki klasycznej to ZFC – teoria Zermelo-Fraenkla z aksjomatem wyboru. W szczególności ZFC opisuje konstrukcję zbioru wszystkich liczb rzeczywistych jako zbioru podzbiorów (zbiór potęgowy P($\mathbb{N}$) zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N}$. Jednak ZFC jest teorią 1-go rzędu oraz P($\mathbb{N}$) zależy od modelu. Chodzi o to, że ZFC jako teoria 1-go rzędu nie jest teorią kategoryczną – posiada nieskończenie wiele nieizomorficznych modeli w danej mocy. W każdym takim modelu M istnieją różne kopie osi liczb rzeczywistych R_M. Kluczowe dla relacji $\mathbb{R}_{QM}$ i $\mathbb{R}$ jest to, że maksymalne, zupełne algebry Boole'a, B, wybrane z kraty $\mathbb{L}$, wyznaczają modele ZFC (Takeuti, 1978; Król et al. 2017; Klimasara i Król, 2015; Asselmeyer-Maluga, 2016). Oznaczmy model ZFC wyznaczony przez B jako $Sh(B)$. Mianowicie

Lemat 2 (Takeuti, 1978). *Dla każdej maksymalnej zupełnej algebry Boole'a B j.w. istnieje kanonicznie skonstruowany boolowski model ZFC,* $Sh(B)$. *Liczby rzeczywiste w* $Sh(B)$*, tzn.* $r \in R_{Sh(B)}$*, odpowiadają* 1:1 *operatorom samosprzężonym w B, tj.* $r \Leftrightarrow A_r \in B$.

Modele boolowskie ZFC to specjalna klasa modeli, których modele klasyczne, $Sh(\{0, 1\}) \simeq M$, stanowią specjalną podklasę.

Lemat 2 pokazuje zadziwiającą zgodność pomiędzy liczbami rzeczywistymi w pewnych modelach boolowskich ZFC i operatorami samosprzężonymi, które reprezentują wielkości mierzalne w mechanice kwantowej. Z tego powodu traktujemy $R_{Sh(B)} = R_B$ jako $\mathbb{R}_{QM}$, tj. jako oś liczb rzeczywistych mechaniki kwantowej opisanej przestrzenią Hilberta stanów $\mathcal{H}$. Okazuje się jednak, że

Lemat 3 (e.g. Król et al, 2017). *Rodzina wszystkich maksymalnych algebr Boole'a* $\{B\}$ *wybranych z* $\mathbb{L}$ *nie może być zredukowana do zbioru 1-elementowego. Istnieją przynajmniej dwie różne algebry w* $\{B\}$.

Jest to bezpośredni wniosek z faktu, że gdyby redukcja powyższa była możliwa to krata rzutowań $\mathbb{L}$ musiałaby być dystrybutywna. Zatem, rodzina dopuszczalnych osi liczb rzeczywistych $\{R_B\}$ jest też wieloelementowa. Czyli atlas lokalnych map $\{R^n_B\}$ nie redukuje się do jednej mapy $\{R^n\}$. Przypuśćmy dalej, że przejście od mechaniki kwantowej do wielkoskalowej struktury różniczkowalnej na czasoprzestrzeni wyróżnia rozmaitość M^n jako model czasoprzestrzeni. Oś $\mathbb{R}$ jest generowana jej kwantowym odpowiednikiem $\mathbb{R}_{QM}$ czyli którąś R_B. M^n lokalnie opisuje się przez kawałki $U_\alpha \subset M^n$ dyfeomorficzne z $\mathbb{R}^n$, tj. $\phi_\alpha(U_\alpha) = \mathbb{R}^n$ dla pewnych dyfeomorfizmów ϕ_α. Przyjmijmy, że każdy taki 'kawałek', tj. $\mathbb{R}^n$, jest wyznaczony pewnym R_B czyli $R^n_B \to \mathbb{R}^n$. Przy czym, dla różnych $\phi(U) = R^n_B$, $\phi'(U') = R^n_{B'}$, jeśli $U \neq U'$ jako podzbiory M^n, to $B \neq B'$. Dla szczególnego przypadku $M^n = \mathbb{R}^n$ otrzymujemy ważne

Twierdzenie 1 (Król et al, 2017). *Jeśli $M^n = \mathbb{R}^n$ jest gładkie i jest generowane atlasem kwantowym $\{R^n_B\}$ z kraty $\mathbb{L}$, to*

i. $M^n = \mathbb{R}^n$ nie jest płaskie, tzn. nie znika tożsamościowo tensor Riemanna $R_{\mu\nu\rho\chi}$ na tym $\mathbb{R}^n$, tzn. $\exists x \in \mathbb{R}^n (R_{\mu\nu\rho\chi}(x) \neq 0)$ oraz żaden obraz poprzez dyfeomorfizm gładki rozmaitości M^n nie zmienia tej własności.

ii. $n = 4$, tj. musi być $M^n = \mathbb{R}^4$.

Bezpośredni wniosek jest następujący: jedyną gładką rozmaitością $M^n = \mathbb{R}^n$ generowaną kratą $\mathbb{L}$ jest *egzotyczne* R^n, czyli rozmaitość topologicznie identyczna z $\mathbb{R}^n$ ale niedyfeomorficzna z nią. Takie egzotyczne $\mathbb{R}^n$ nie mogą być płaskie i istnieją tylko dla $n = 4$. Otrzymaliśmy ważny wniosek: zestawienie kraty rzutowań mechaniki kwantowej opisującej wszechświat w skali mikro z gładką strukturą rozmaitości czasoprzestrzeni w skali makro, generuje krzywiznę czasoprzestrzeni i ustala jej wymiar na $n = 4$ (wyklucza każde inne $n \neq 4$). W następnym rozdziale spróbujemy nadać fizyczne znaczenie krzywiźnie na $\mathbb{R}^4$ generowanej kratą rzutowań $\mathbb{L}$. Zauważmy, że nie możemy tej krzywizny 'usunąć' żadnym dyfeomorfizmem gładkim. Jej nieznikanie ma silnie niezmienniczy charakter.

3. Problem stałej kosmologicznej

Jeśli ewolucja wszechświata została zapoczątkowana pewnym reżimem kwantowym (pierwotny stan kwantowy) i prowadzi do gładkiej czasoprzestrzeni gdzie dominuje klasyczna grawitacja (np. Weinberg, 1972; Ellis et al., 2012), to spróbujmy wyjaśnić rolę formalnych zależności z poprzedniego rozdziału w takim właśnie modelu. Jednym z otrzymanych wniosków jest istnienie niezerowej krzywizny na $\mathbb{R}^n$ w wymiarze 4. Spróbujemy zatem oszacować wartość tej krzywizny. Następnie zastanowimy się, czy wartość ta jest stabilna (np. jako niezmiennik topologiczny) i czy jest fizyczna. Stała kosmologiczna to gęstość energii próżni odpowiedzialna za przyspieszające rozszerzanie się wszechświata. Fizykom, na podstawie danych doświadczalnych zebranych w ramach misji PLANCK, udało się podać silne ograniczenie na wartość stałej kosmologicznej tj. $\sim 10^{-29}[g/cm^3]$. Kwantową energię próżni możemy również oszacować teoretycznie posługując się technikami kwantowej teorii pola (KTP). Obydwie wielkości powinny być zgodne. Jednak, otrzymany z KTP wynik, w zależności od rodzaju teorii i pól, jest rzędu od 10^{60} do 10^{120} razy większy niż ten obserwowany w PLANCK (Ellis et al., 2012, s. 371). Taka niezgodność wyniku doświadczalnego i przewidywania teoretycznego jest oczywiście druzgocąca dla teorii przewidującej taki wynik. Jest to KTP – obecnie jedna z najlepszych teorii fizycznych. Nie istnieje dobry i powszechnie akceptowany sposób teoretyczny uzasadnienia obserwowanej wartości stałej kosmologicznej. To jedno z krytycznych zagadnień dla całej fizyki.

Naszym celem jest 1) Wskazanie pewnego zanurzenia egzotycznego R^4 w rozmaitość 4-ro wymiarową N^4; 2) Wskazanie (kilku) podrozmaitości w R^4, których krzywizna brzegów, przy powyższym zanurzeniu, jest niezmiennikiem topologicznym; 3) Policzenie wartości tego niezmiennika i porównanie z wartością energii próżni dostarczoną danymi misji PLANCK. Program ten został niedawno zrealizowany (Asselmeyer-Maluga i Król, 2017; 2014; Król et al., 2017). Okazuje się, że istnieje taka rozmaitość N^4 z punktu 1) powyżej i, że jest ona powierzchnią zespoloną $K3\#\overline{CP}(2)$. Tutaj $K3$ to sławna powierzchnia zespolona (2 wymiary zespolone a 4 rzeczywiste) a $\overline{CP}(2)$ to rozmaitość rzutowa zespolona 2-wymiarowa (4 wymiary rzeczywiste) $\overline{CP(2)}$ ze zmienioną orientacją, symbol # oznacza sumę spójną tych dwóch rozmaitości. Dla powierzchni $K3\#\overline{CP(2)}$ istnieje egzotyczne R^4 kanonicznie w niej zanurzone. Zanurzenie to wyznacza zmiany 3-wymiarowych brzegów pewnych 4-wymiarowych podrozmaitości w R^4, tj. $S^3 \to \Sigma(2, 5, 7) \to P\#P$, gdzie S^3 to sfera 3-wymiarowa, $\Sigma(2, 5, 7)$ tzw. sfera homologiczna Brieskorna (jedna z nieskończonej ilości, które są odróżniane wartościami parametrów w nawiasie), P to inna 3-sfera homologiczna, sfera Poincarégo, a $P\#P$ to suma spójna dwóch kopii sfery P. Wtedy topologicznie niezmiennicza część krzywizny R^4 zanurzonego w $K3\#\overline{CP(2)}$ wyrażona relatywnie do fizycznej stałej Hubble'a H_0, jest dana wyrażeniem:

$$\Omega_\Lambda = \frac{c^5}{3hGH_0^2} \cdot \exp\left(-\frac{3}{CS(\Sigma(2,5,7))} - \frac{3}{CS(P\#P)} - \frac{\chi(A_{cork})}{4}\right).$$

gdzie c to prędkość światła, h – stała Plancka, G stała Newtona, $CS(\Sigma(2,5,7))$ to niezmiennik topologiczny Cherna-Simonsa sfery homologicznej Brieskorna $\Sigma(2,5,7)$, $CS(P\#P)$ niezmiennik Cherna-Simonsa sumy spójnej dwóch sfer Poincarégo, $\chi(A_{cork})$ to niezmiennik topologiczny Eulera tzw. korka Akbuluta w R^4 (pewnej 3-wymiarowej zwartej podrozmaitości w R^4). Powyższe wyrażenie określa wartość krzywizny jako części krytycznej energii próżni. Bezpośrednie wyliczenie daje (Asselmeyer-Maluga i Król, 2017):

$$\Omega_\Lambda = 0{,}6869.$$

Porównując tę wartość z dostarczonym przez PLANCK oszacowaniem energii próżni jako części energii krytycznej, tj. $\Omega_{Planck} = 0{,}683$ (Ade et al., 2016), stwierdzamy istotną zgodność obu wyników.

To zdumiewające, że można myśleć o stałej kosmologicznej jako niezmienniku topologicznym związanym z niestandardową (egzotyczną) gładkością na $\mathbb{R}^4$.

Bibliografia

Ade, P.A.R., Aghanim, N., Arnaud, M., Ashdown, M., Aumont, J., Baccigalupi, C., Banday, A.J., Barreiro, R.B., Bartlett, J.G., Bartolo, N., et al., 2016. Planck 2015 results XIII. Cosmological parameters. *Astron. Astrophys.*, A13, s. 594.

Asselmeyer-Maluga, T., Bielas, K., Klimasara, P., Król, J., 2016. The latent meaning of forcing in quantum mechanics. *Acta Phys. Pol. B*, 47, s. 1685–1690.

Asselmeyer-Maluga, T., Król, J., 2014. Inflation and topological phase transition driven by exotic smoothness. *Adv. High Energy Phys.*, 2014, s. 867460.

Asselmeyer-Maluga, T., Król, J., 2017. How to obtain a cosmological constant from small exotic R4. *Physics of the Dark Universe*, https://doi.org/10.1016/j.dark.2017.12.002.

Bielas, K., Klimasara, P., Król, J., 2015. The structure of the real line in quantum mechanics and cosmology. *Acta Phys. Pol. B*, 46, s. 2375–2379.

Ellis, G.F.R., Maartens, R., Maccallum, M.A.H., 2012. *Relativistic cosmology*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Klimasara, P., Król, J., 2015. Remarks on mathematical foundations of quantum mechanics. *Acta Phys. Pol. B*, 46, s. 1309.

Król, J., Asselmeyer-Maluga, T.; Bielas, K.; Klimasara, P., 2017. From quantum to cosmological regime. The role of forcing and exotic 4-smoothness. *Universe*, 3 (2), s. 31.

Takeuti, G., 1978. *Two applications of logic to mathematics*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Weinberg, S., 1972. *Gravitation and cosmology: Principles and applications of the general theory of relativity*, New York: John Wiley and Sons.