Uniwersalność systemów funkcyjnych a całkowitość dziedzin funkcji – granice konfliktu i wzajemnego wpływu

Jerzy Mycka
Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej, Instytut Matematyki

Universality of functional systems and totality of their elements – the limits of conflict and mutual influence

Abstract

The article presents several examples of different mathematical structures and interprets their properties related to the existence of universal functions. In this context, relations between the problem of totality of elements and possible forms of universal functions are analyzed. Furthermore, some global and local aspects of the mentioned functional systems are distinguished and compared. In addition, the paper attempts to link universality and totality with the dynamic and static properties of mathematical objects and to consider the problem of limitations in the construction of structures combining harmoniously the availability of information at the local and global level.

Keywords

universality; total functions; computability

1. Wprowadzenie

Przy badaniu struktur matematycznych w naturalny sposób można wyróżnić dwa podejścia:

- analiza własności struktury pojmowanej jako całość,
- wyznaczanie własności poszczególnych elementów struktury.

Zajmując się tymi dwoma zagadnieniami nie sposób nie postawić pytań o ich wzajemne związki. Czy pełna znajomość pojedynczych elementów struktury ułatwia analizę całej struktury? Czy z informacji o strukturze wynikają jakieś interesujące fakty o poszczególnych elementach? W tych pytaniach możemy dostrzec ideę poszukiwania związku pomiędzy globalnym a lokalnym poziomem analizy struktur matematycznych.

Tak ogólne sformułowanie problemu nie pozwoliłoby na rozwinięcie bardziej szczegółowych badań. Dlatego skoncentrujemy się przede wszystkim na strukturach, których elementami są funkcje. Za narzędzie prezentujące wiedzę o globalnym poziomie struktury przyjmiemy funkcję uniwersalną – to znaczy funkcję pozwalającą na konstrukcję wszystkich elementów struktury.

Definicja 1 *Niech X będzie pewnym zbiorem funkcji o dziedzinie A i przeciwdziedzinie B. Mówimy, że $F_X: I \times A \to B$ jest funkcją uniwersalną dla X wtedy i tylko wtedy, gdy*

1. *dla każdej funkcji $f \in X$ istnieje indeks $i \in I$ taki, że dla każdego argumentu $a \in A$ zachodzi*

$$F_X(i,a) = f(a);$$

2. *każda funkcja uzyskana przez ustalenie pierwszego argumentu F_X należy do X, inaczej mówiąc: dla każdego ustalonego $i \in I$ funkcja $g(a) = F_X(i, a)$ spełnia warunek $g \in X$.*

W powyższych wyrażeniach znak równości = traktujemy w sposób rozszerzony: albo obie strony są zdefiniowane i równe sobie, albo obie strony są równocześnie niezdefiniowane.

Samo pojęcie funkcji uniwersalnej nie pozwala na głębsze analizy. Można postulować jej istnienie dla różnych zbiorów funkcyjnych bez uzyskania jakiejkolwiek nietrywialnej charakterystyki tych zbiorów. Jednakże, gdy wobec funkcji uniwersalnej postawimy pewne dodatkowe wymagania (dotyczące jej typu i własności), jej istnienie (lub nieistnienie) może się okazać interesującym faktem. Zwykle przy konstrukcji funkcji uniwersalnej F_X dla X staramy się nakładać te dodatkowe warunki na F_X w taki sposób, aby ta funkcja spełniała pewne warunki dopasowania do X (np. w przypadku struktury funkcji obliczalnych zwykle wymaga się także obliczalności funkcji uniwersalnej). Dlatego właśnie nie tyle same funkcje uniwersalne, ale ich specyficzne warianty o stosownie dobranych cechach będą stanowiły punkt odniesienia w tej pracy.

Przy okazji warto zauważyć, że funkcja F_X przy ustaleniu pierwszego argumentu określa funkcje z f: $A \rightarrow B$, stąd można alternatywnie pojmować F_X jako funkcję F_X: $I \rightarrow B^A$. Należy jednak pamiętać, że w tym drugim ujęciu określenie warunków dopasowania funkcji uniwersalnej do opisywanej struktury może wymagać szczególnego rodzaju sformułowań.

Z kolei znajomość własności poszczególnych obiektów struktury w przypadku funkcji można w naturalny sposób utożsamić z możliwością obliczania wartości tej funkcji dla dowolnego argumentu. W ten sposób pełna wiedza o funkcji oznaczałaby zdolność do znalezienia wyniku dla każdego dopuszczalnego argumentu, to oznacza, że dziedzina funkcji powinna być całkowita – czyli dziedzina nie powinna być pomniejszona o jakiekolwiek elementy.

Definicja 2 *Niech X będzie pewnym zbiorem funkcji, których dziedziny zawierają się w zbiorze A. Mówimy, że funkcja $f \in X$ jest funkcją całkowitą (funkcją z dziedziną całkowitą) wtedy i tylko wtedy, gdy dziedzina f jest identyczna ze zbiorem A.*

W przypadku jednoargumentowych funkcji obliczalnych (rozumianych jako funkcje częściowo rekurencyjne zdefiniowanych jak w (Odifreddi, 1992)) przyjmujemy, że funkcja jest całkowita, gdy jest zdefiniowana dla każdego argumentu $x \in \mathbb{N}$.

Przy tego rodzaju uściśleniach problem własności globalnych i lokalnych można uszczegółowić do kwestii: jaki związek zachodzi pomiędzy istnieniem funkcji uniwersalnej a warunkiem całkowitości funkcji, będących elementami rozważanej struktury. Tak sformułowane zagadnienia przeanalizujmy na kilku wybranych przykładach.

2. Przeliczalność a zbiór funkcji $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$

Przywołajmy klasyczne wyniki dotyczące zbioru funkcji naturalnych, które pozostają w związku z zasygnalizowanym zagadnieniem. Przypomnijmy najpierw, że zbiór A nazywamy przeliczalnym wtedy i tylko wtedy, gdy jest pusty lub istnieje surjekcja f ze zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N}$ na zbiór A (czyli funkcja f spełnia warunki: $f(\mathbb{N}) = A$). Wypada rozpocząć od twierdzenia dotyczącego zbioru funkcji całkowitych o argumentach i wartościach w zbiorze $\mathbb{N}$.

Twierdzenie 3 *Zbiór funkcji* $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \{f | f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\}$ *nie jest przeliczalny.*

Wynik jest łatwy do uzasadnienia na podstawie następującej obserwacji: jeżeli $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ jest przeliczalny, to istnieje funkcja uniwersalna $F\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Jednak wykorzystując funkcję F możemy zdefiniować nową funkcję[1] całkowitą o dziedzinie bę-

[1] W tym przypadku $F(n, x)$ oznacza funkcję o indeksie n z argumentami x w dziedzinie $\mathbb{N}$ i wartościami w zbiorze $\mathbb{N}$.

dącej zbiorem $\mathbb{N}$: $g(n) = F(n, n) + 1$. Ta funkcja g jest różna dla argumentu n od każdej funkcji ze zbioru $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. To oznacza, że otrzymaliśmy sprzeczność (bo przecież $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ zawiera wszystkie funkcje całkowite z $\mathbb{N}$ w $\mathbb{N}$) i w takim razie założenie o przeliczalności $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ musi być odrzucone.

Może popatrzeć na ten wynik w inny sposób. Mianowicie możemy zinterpretować Twierdzenie 3 jako stwierdzenie dotyczące funkcji uniwersalnej.

Twierdzenie 4 *W zbiorze funkcji całkowitych o dziedzinie w* $\mathbb{N}$ *nie istnieje funkcja uniwersalna dla zbioru* $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Warto zauważyć, że dobór funkcji uniwersalnej (jej całkowitość oraz dziedzina będąca zbiorem liczb naturalnych) jest dopasowany do charakterystyki elementów zbioru $X = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. W ten sposób otrzymaliśmy interpretację, która sugeruje, że pełna informacja o elementach $X = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (całkowitość $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$) wyklucza konstrukcję funkcji uniwersalnej odpowiadającej swoim typem elementom rozważanego zbioru.

Pozostaje zapytać, co się stanie, gdy zrezygnujemy z wymagania całkowitości funkcji w rozważanym zbiorze. Niech $\mathbb{N}^{\leq\mathbb{N}}$ oznacza zbiór funkcji częściowych (niekoniecznie zdefiniowanych na całym zbiorze $\mathbb{N}$): $\mathbb{N}^{\leq\mathbb{N}} = \{f | f\colon \mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{N}\}$[2]. W tym przypadku pojawia się jednak kwestia możliwości konstrukcji, które

[2] W przypadku zapisu $f\colon A \rightarrow B$ przyjmujemy, że dziedzina f jest równa A, zaś w przypadku notacji $f\colon A \hookrightarrow B$ dziedzina f jest podzbiorem (właściwym lub niewłaściwym) zbioru A.

rozróżniają pomiędzy liczbami należącymi i nienależącymi do dziedzin rozważanych funkcji. Ponieważ efektywność tego rozróżnienia jest wątpliwa, naturalnym wydaje się zwrócenie ku logice intuicjonistycznej, która nie gwarantuje prawa wyłączonego środka. Możemy wprowadzić teraz zmodyfikowaną definicję mocy zbioru związaną z aparatem logiki intucjonistycznej.

Definicja 5 *Zbiór A jest intuicjonistycznie przeliczalny wtedy i tylko wtedy, gdy jest pusty lub istnieje intucjonistycznie zdefiniowana surjekcja* $F\colon \mathbb{N} \to A$ *taka, że* $F(\mathbb{N}) = A$.

Ponieważ wśród podzbiorów $\mathbb{N}$ mogą istnieć podzbiory intuicjonistycznie nieprzeliczalne, dlatego uściślijmy wprowadzoną powyżej definicję zbioru funkcji częściowych przez określenie nowego zbioru $\mathbb{N}^{\leq\mathbb{N}*} = \{f | f\colon \mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{N}\}$, gdzie funkcja f ma intuicjonistycznie przeliczalną dziedzinę.

Jak się okazuje można wykazać następujący fakt (cf. Bell, 2014, s. 5).

Twierdzenie 6 *Intuicjonistyczna przeliczalność zbioru* $\mathbb{N}^{\leq\mathbb{N}*}$ *jest niesprzeczna z teorią zbiorów opartą na logice intuicjonistycznej.*

To oznacza, że przy wprowadzaniu surjekcji $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^{\leq\mathbb{N}*}$ w obrębie intucjonistycznej teorii zbiorów nie powstaje sprzeczność. W ten sposób otrzymaliśmy obserwację, że w zbiorze $\mathbb{N}^{\leq\mathbb{N}*}$ można wprowadzić funkcje uniwersalną $F_{<}(n, x) = \varphi(n)(x)$, odpowiadającą typem elementom opisywanego zbioru (przy założeniu intuicjonistycznie rozumianej efektywności). To pokazuje, że można dopatrzyć się pewnego związku pomiędzy matematycznie uzyskiwaną wiedzą o globalnych i lokalnych pewnych strukturach. W analizowanym przypadku $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ całkowitość elementów eliminowała możliwość utworzenia funkcji uniwersalnej, zaś relaksacja warunków nałożonych na elementy zbioru (wprowadzenie częściowości) pozwalała zbudować funkcję uniwersalną.

Otrzymujemy w ten sposób pierwszy sygnał o możliwym konflikcie pomiędzy matematycznymi możliwościami analizy globalnych i lokalnych własności pewnych struktur – uściślanie wiedzy o lokalnych elementach (funkcjach) struktury może prowadzić do osłabiania potencjalnych konstrukcji globalnych (funkcji uniwersalnych).

3. Funkcje ciągłe a funkcje uniwersalne

Uzyskane powyżej wyniki dotyczą zbiorów przeliczalnych. Powstaje więc pytanie, czy fenomen niemożności tworzenia pewnych funkcji uniwersalnych dotyczy tylko struktur, których nośniki mają stosunkowo niską moc. W celu przeanalizowania tego problemu zwrócimy się do funkcji określonych na zbiorze liczb rzeczywistych. Przyjmując standardową definicję ciągłości funkcji f wyrażoną warunkiem $\forall x_0 \in \mathbb{R}(f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x))$, możemy uzyskać twierdzenie, który określi nam moc zbioru funkcji ciągłych.

Twierdzenie 7 (Hrbacek and Jech, 1999) *Funkcji ciągłych na* $\mathbb{R}$ *jest* $\mathfrak{c}$ *(gdzie* $\mathfrak{c}$ *jest mocą zbioru liczb rzeczywistych).*

Ten wynik pozwala nam na podjęcie próby konstrukcji funkcji uniwersalnej, w której zbiór indeksów będzie zbiorem liczb rzeczywistych, zaś zbiorem indeksowanym będą funkcje ciągłe tworzące zbiór $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$. Jednakże konstrukcja takiej funkcji musi uwzględnić ograniczenia podane przez następujące twierdzenia analizy matematycznej (cf. Kharazishvili, 2005).

Twierdzenie 8 *Jeżeli funkcja* f *jest bijekcją pomiędzy* $\mathbb{R}$ *i* $\mathbb{R}^2$ *to funkcja* f *nie jest funkcją ciągłą.*

Co więcej mamy także następujący fakt.

Twierdzenie 9 *Niech* f *będzie funkcją z* $\mathbb{R}^2$ *w* $\mathbb{R}$*. Jeżeli* f *jest funkcją ciągłą (względem obu zmiennych) to* f *nie jest iniekcją.*

Równoważne sformułowanie powyższego wyniku można podać używając kontrapozycji: jeżeli f jest iniekcją to nie jest funkcją ciągłą. Oczywiście w przypadku ciągłych suriekcji jest inaczej: istnieje wiele funkcji ciągłych z $\mathbb{R}^2$ na $\mathbb{R}$ (elementarnymi przykładami są dodawanie i mnożenie).

Odnieśmy te twierdzenia do naszego problemu konstrukcji funkcji uniwersalnej $F_{\mathcal{C}^0(\mathbb{R})}\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dla zbioru funkcji ciągłych $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$. W tym przypadku naturalnym warunkiem gwarantującym dopasowanie funkcji uniwersalnej do opisywanego zbioru byłaby ciągłość $F_{\mathcal{C}^0(\mathbb{R})}$. Oprócz tego wydawałoby się naturalne, aby opis struktury dokonywany za pomocą funkcji uniwersalnej był jednoznaczny: to znaczy, aby każda funkcja ciągła posiadała dokładnie jeden indeks. Jednak – powyżej wskazany – brak ciągłych bijekcji pomiędzy $\mathbb{R}$ i $\mathbb{R}^2$ (warunkowany brakiem ciągłych iniekcji) prowadzi do następującego wniosku.

Twierdzenie 10 *Nie ma ciągłej funkcji uniwersalnej – o jednoznacznym opisie elementów – dla nieprzeliczalnego zbioru funkcji ciągłych* $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.

Spróbujmy umiejscowić ten wynik w kontekście naszych rozważań o wzajemnych oddziaływaniach własności lokalnych i globalnych struktur matematycznych. Aby uzyskać odpowiedni rodzaj funkcji uniwersalnej dla funkcji ciągłych musimy odrzucić jakąś własność, która czyniłaby konstrukcję możliwie naturalną. Pierwszym wariantem jest rezygnacja z ciągłości funkcji uniwersalnej – w tym przypadku znika dopasowanie tej funkcji do elementów opisywanego zbioru. W drugim przypadku należy zrezygnować z jednoznacznego opisu elementów $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$. Jednak wówczas pełna informacja o pojedynczej funkcji nie jest przekazywana przez pojedynczy indeks, lecz dopiero poprzez zbiór wszystkich indeksów rozważanej funkcji. Tak więc pojedynczy indeks funkcji uniwersalnej niesie tylko częściową informację o wskazywanym elemencie. To oznacza, że próba przeniesienia na poziom globalny wszystkich składowych cech elementów struktury zawodzi i pozostajemy z tylko częściowo określoną informacją przekazywaną przez funkcję uniwersalną. Co więcej, otwarte pozostaje pytanie o status zbiorów indeksów odpowiadających jednej funkcji, do której to kwestii powrócimy w kontekście funkcji obliczalnych.

4. Uniwersalność w przypadku funkcji obliczalnych

Ponieważ nasze rozważania związane są z ograniczeniami w dostępie do informacji o globalnych i lokalnych aspektach struktur matematycznych, to naturalne jest zwrócenie szczególnej uwagi na funkcje obliczalne. Teoria obliczalności zajmuje się reprezentacją obiektów i procesów generowanych w wyniku aktywności algorytmicznej. Jej związki z teorią dowodów oraz logiką matematyczną sytuują jej pole jako bezpośrednio związane z problemem zawartości informacyjnej danych oraz przepływu informacji (por. Chaitin, 2004). Dlatego szczególnie interesujące byłoby odniesienie problemu funkcji uniwersalnej do tych właśnie funkcji, którym można przypisać własności algorytmiczne.

Zdefiniowanie funkcji obliczalnych można przeprowadzić na bardzo wiele – wzajemnie równoważnych – sposobów. Wśród nich najbardziej znanymi metodami formalizowania pojęcia obliczalności są konstrukcje zaproponowane w obrębie następujących teorii (cf. Odifreddi, 1992):

- funkcji częściowo rekurencyjnych;
- maszyn Turinga;
- λ-rachunku (rachunku Churcha).

Skoncentrujemy tu naszą uwagę na funkcjach o argumentach będących liczbami naturalnymi i wynikach także znajdujących się w zbiorze ℕ. Rozpoczniemy od kilku sposobów definiowania funkcji o argumentach i wynikach naturalnych, które zachowują efektywność obliczenia wyniku funkcji. Dla zadanej funkcji g: $\mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$ oraz ciągu funkcji $h_1, \ldots, \mathrm{h}_m$: $\mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ funkcję f: $\mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ będziemy nazywali *złożeniem* g oraz $h_1, ..., h_m$ i oznaczali $c^m(g, h_1, \ldots, h_m)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdych $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{N}$ zachodzi: $f(x_1, \ldots, x_n) = g(h_1(x_1, \ldots, x_n), ..., h_m(x_1, \ldots, x_n))$.

Operacjami pozwalającymi na bardziej złożone definicje, w których ważną rolę gra element powtórzenia, są rekursja oraz minimalizacja. W pierwszym przypadku dla zadanych funkcji g: $\mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ oraz h: $\mathbb{N}^{n+2} \to \mathbb{N}$ zdefiniujemy nową funkcję f: $\mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$, którą będziemy nazywali wynikiem *rekursji prostej* na g oraz h i oznaczali $r(g, h)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdych $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{N}$ zachodzi:

$$f(x_1, \ldots, x_n, 0) = g(x_1, \ldots, x_n);$$
$$f(x_1, \ldots, x_n, y+1) = h(x_1, \ldots, x_n, y, f(x_1, \ldots, x_n, y)).$$

Z kolei dla zadanej funkcji g: $\mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ nową funkcję f: $\mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ będziemy nazywali wynikiem *minimalizacji nieograniczone*j na g i oznaczali $\mu(g)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdych $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{N}$ zachodzi:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = y \Leftrightarrow g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$$

oraz $(\forall z < y)$ funkcja $g(x_1, \ldots, x_n, z)$ jest zdefiniowana i różna od 0.

Przyjmując następujące oznaczenia: $Z(x) = 0$ dla funkcji stale równej zeru; $S(x) = x + 1$ dla następnika oraz I_n^k dla funkcji rzutowania: $I_n^k(x_1, \ldots, x_n) = x_k$ możemy podać precyzyjną definicję funkcji częściowo rekurencyjnej.

Najpierw określimy zbiór funkcji częściowo rekurencyjnych jako zbiór $\mathcal{PREC}$, do którego należą wymienione funkcje $\{Z, S, I_n^k : 1 \leq k \leq n \in \mathbb{N}\}$ oraz który jest zamknięty ze względu na opisane powyżej operacje $\{\mu, r, c^m : m \in \mathbb{N}, m \geq 1\}$ – to znaczy wyniki operacji złożenia, rekursji prostej oraz minimalizacji należą do $\mathcal{PREC}$ zawsze, gdy wykorzystane w nich argumenty pochodziły z $\mathcal{PREC}$.

Definicja 11 *Funkcję f: $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ będziemy nazywali funkcją częściowo rekurencyjną wtedy i tylko wtedy, gdy f należy do zbioru $\mathcal{PREC}$.*

Ponieważ ten sposób sformalizowania obliczalności jest równoważny wielu innym metodom, dlatego – zgodnie z coraz częściej przyjmowaną konwencją – funkcje częściowo rekurencyjne będziemy po prostu nazywali funkcjami obliczalnymi. Zbiór funkcji obliczalnych ma moc przeliczalną, co łatwo zauważyć, gdy z każdą definicją funkcji obliczalnej zwiążemy zbudowany ze skończonej liczby symboli opis algorytmu wyliczającego tę funkcję. To prowadzi do pytania o możliwość konstrukcji funkcji uniwersalnej $F_{\mathcal{PREC}}$ o dziedzinie w $\mathbb{N}$ dla zbioru

$\mathcal{PREC}$. Warto zauważyć, że dodatkowe wymagania, jakie będziemy chcieli nałożyć na indeksy funkcji, mogą mieć wpływ na uszczegółowienie definicji funkcji uniwersalnej.

W szczególności problemem może być realizacja operacji na funkcjach poprzez obliczenia na indeksach. Najbardziej podstawową operacją na funkcjach jest ich złożenie i dlatego oczekiwalibyśmy, że znając indeksy funkcji będących argumentami złożenia będziemy mogli w sposób obliczalny wyliczyć indeks funkcji będącej wynikiem tego złożenia. Jednak zwykły kształt funkcji uniwersalnej nie gwarantuje indeksowania zapewniającego spełnienie warunku obliczalności operacji na indeksach.

Dlatego czasem używane jest wzmocnienie definicji funkcji uniwersalnej, które poprzez dodatkowy warunek zapewnia szczególne własności indeksowania.

Definicja 12 (Shen and Vereshchagin, 2002) *Niech $F_{\mathcal{PREC}}$ będzie funkcją uniwersalną dla $\mathcal{PREC}$ spełniającą warunki Definicji 1. Wówczas $F_{\mathcal{PREC}}$ będziemy nazywali mocną (Gödlowską) funkcją uniwersalną, gdy będzie ona spełniała następujący warunek: dla każdej dwuargumentowej funkcji obliczalnej g istnieje funkcja obliczalna h taka, że*

$$(\forall n, x) g(n, x) = F_{\mathcal{PREC}}(h(n), x).$$

Przy tak zadanej funkcji uniwersalnej indeksowanie umożliwia wyliczanie indeksu wyniku złożenia funkcji w sposób obliczalny.

Bez względu na to, którą wersję (słabą czy mocną) definicji funkcji uniwersalnej weźmiemy pod uwagę, prawdziwy pozostaje poniższy wynik.

Twierdzenie 13 *Nie istnieje całkowita obliczalna funkcja uniwersalna dla zbioru całkowitych funkcji obliczalnych.*

Dowód wykorzystuje zamkniętość zbioru całkowitych funkcji obliczalnych ze względu na złożenie oraz fakt, że funkcje następnika oraz rzutowania są całkowitymi funkcjami obliczalnymi. W ten sposób w bardzo klarownej postaci znów otrzymujemy sytuację podobną do wcześniej rozważanych: precyzyjny opis elementów struktury funkcji obliczalnych uniemożliwia pełny opis całej struktury.

Można uzyskać funkcję uniwersalną dla całkowitych funkcji obliczalnych jeżeli zrezygnujemy z wymagania jej obliczalności. W tym przypadku brak obliczalności przynosi dwa problemy: po pierwsze – funkcja uniwersalna różni się swoim charakterem od indeksowanych elementów (nie występują dopasowanie globalnej charakterystyki do elementów struktury); po drugie – nieobliczalność ogranicza możliwość uzyskiwania informacji o analizowanej strukturze (nieobliczalność wprowadza niekonstruktywność funkcji utrudniając wykorzystanie jej do efektywnych obliczeń).

Rozwiązanie problemu przynosi rezygnacja z całkowitości funkcji. W tym przypadku (znowu dla obu wariantów definicji funkcji uniwersalnej) uzyskujemy możliwość konstrukcji indeksowania o obliczalnym charakterze.

Twierdzenie 14 *Istnieje obliczalna funkcja częściowa będąca funkcją uniwersalną dla zbioru częściowych funkcji obliczalnych $\mathcal{PREC}$.*

W przypadku gdy zakładamy, że funkcja uniwersalna używa unikalnych indeksów dla opisywanego zbioru funkcji, tworzy to kolejną komplikację – musimy odrzucić mocny wariant definicji funkcji uniwersalnej.

Twierdzenie 15 *Nie istnieje obliczalna funkcja częściowa, która jest bijekcją na zbiór $\mathcal{PREC}$ oraz która pozwala na obliczalne wyznaczanie indeksów wyniku złożenia funkcji o znanych indeksach.*

Wydaje się, że omówiony materiał ponownie daje odczuć pewnego rodzaju 'opór' matematycznej struktury przed pełnym odsłonięciem jej zawartości informacyjnej. Przy mocnych założeniach pozwalających zawsze znajdować wyniki funkcji, nie możemy skonstruować funkcji uniwersalnej. Jeżeli znajdujemy funkcję uniwersalną, to kosztem pełności charakterystyki funkcji będących elementami struktury – część z nich nie pozwala na obliczenia dla niektórych argumentów (przy czym nie istnieją obliczalne testy, które odróżniają funkcje całkowite od częściowych, czy argumenty należące do dziedziny od leżących poza nią). Co więcej, wymaganie jednoznaczności identyfikacji funkcji niszczy możliwość obliczalnej analizy podstawowej operacji złożenia.

Ta sytuacja pokazuje, że w obrębie zbioru funkcji obliczalnych trudno jest utworzyć strukturę, którą można by nazwać samowystarczalną: jeżeli chcemy przyjąć takie dobre cechy dla systemu funkcyjnego jakimi są obliczalność i całkowitość, to nie można równocześnie utrzymać tych wymagań na poziomie lokalnym i globalnym. To prowadzi albo do częściowej utraty możliwości analizy struktury, albo wznoszenia opisu globalnego do konstrukcji innego typu (nieobliczalnych funkcji uniwersalnych). Tego rodzaju konstrukcje w teorii obliczalności wiążą się z nieskończonymi hierarchiami funkcji i relacji oraz stopniami nierozstrzygalności (por. Rogers, 1987), które ilustrują coraz to większą utratę efektywnych własności rozważanych struktur.

5. Predykat prawdy Tarskiego

Przenieśmy nasze rozważania do dziedziny logiki matematycznej, a dokładniej na grunt logiki predykatów I rzędu. W pewnym sensie poszukiwanie uniwersalnego predykatu prawdy, czyli predykatu, który dla argumentów odpowiadających wszystkim możliwym zdaniom logicznym określa ich wartość logiczną, jest także poszukiwaniem funkcji uniwersalnej.

Uściślijmy najpierw notację. Dla każdej formuły logicznej, w której nie występują zmienne niezwiązane kwantyfikatorami (zdań logicznych), możemy określić pewien efektywny sposób ich kodowania (przypisywania im numerałów). Kod formuły ψ będziemy oznaczali przez $\ulcorner\psi\urcorner$ – sam sposób kodowania nie jest szczególnie istotny, zwykle określa się go indukcyjnie: dla f będącego głównym funktorem określamy $\lceil\psi\rceil = p_0^{SN(f)+1}\, p_1^{\lceil\phi 1\rceil}...p_n^{\lceil\phi n\rceil}$, gdzie $\lceil\phi_i\rceil$, $1 \leq i \leq n$ są kodami podformuł ϕ_i, przy czym dla elementów alfabetu (funktorów, zmiennych lub stałych) przyjmujemy $\lceil e\rceil = SN(e)$; SN przypisuje elementom alfabetu unikalne liczby naturalne, zaś p_i są kolejnymi liczbami pierwszymi.

Definicja 16 *Predykatem prawdy dla zbioru zdań Ψ będziemy nazywali jednoargumentowy predykat T taki, że dla każdego zdania $\psi \in \Psi$ zachodzi:*

$$\psi \Leftrightarrow T(\lceil\psi\rceil).$$

Znane twierdzenie Tarskiego (por. Bolander, 2002) daje nam typowy dla funkcji uniwersalnych wynik negatywny.

Twierdzenie 17 *Predykat prawdy nie istnieje dla zbioru wszystkich zdań logiki predykatów pierwszego rzędu.*

Dowód przebiega także w sposób często pojawiający się przy negatywnych wynikach dotyczących funkcji uniwersalnych: sprowadzenie do niedorzeczności założenia o istnieniu predykatu *T* poprzez zastosowanie argumentu przekątniowego. Odrzucenie globalnego zasięgu *T* naturalną drogą prowadzi do rozważenia podzbiorów zdań, dla których *T* istnieje. Szeroką klasą takich przypadków jest zbiór zdań, które nie zawierają *T* w obrębie negacji; w szczególności zdania pozytywne (bez negacji) także tworzą klasę ze swoim predykatem prawdy. Jednak oprócz ograniczenia dziedziny funkcji uniwersalnej (predykatu prawdy) możemy pomyśleć o wprowadzeniu słabszego typu wartościowań logicznych, dając efekt odpowiadający niezdefiniowaniu (częściowości) funkcji.

Idąc w tym kierunku rozważmy logikę Kleenego K_3, czyli logikę o zbiorze trzech wartości logicznych {0, 1/2, 1} z następującymi regułami przypisywania wartości logicznych formułom (x/c oznacza podstawienie za zmienną x stałej c):

$$|\psi_1 \vee \psi_2| = \max\{|\psi_1|, |\psi_2|\},$$
$$|\psi_1 \wedge \psi_2| = \min\{|\psi_1|, |\psi_2|\},$$
$$|\psi_1 \rightarrow \psi_2| = \max\{1 - |\psi_1|, |\psi_2|\},$$
$$|\neg\psi_1| = 1 - |\psi_1|,$$
$$|\forall x \psi_1(x)| = \min_c\{|\psi_1(x/c)|\},$$
$$|\exists x \psi_1(x)| = \max_c\{|\psi_1(x/c)|\}.$$

Dla formuł elementarnych (niezłożonych) wartość logiczna jest określona poprzez interpretację predykatu w jego dziedzinie.

Teraz możemy rozważyć predykat prawdy dla tak opisanej logiki, czyli podjąć konstrukcję swoistej funkcji uniwersalnej dla wszystkich możliwych zdań logiki Kleenego. W tym przypadku otrzymujemy pozytywny wynik.

Twierdzenie 18 *Istnieje taki predykat T, że dla każdego zdania* ψ *zachodzi*

$$T(\ulcorner\psi\urcorner) = |\psi|.$$

Logika K_3 została stworzona jako logika nieokreśloności. Wprowadzenie wartości 1/2 jako wartości logicznej miało umożliwić stwierdzanie 'nieokreśloności' lub 'niezdefiniowania'. Jak widać, dopuszczenie tej możliwości pozwoliło na skonstruowanie funkcji uniwersalnej do wyznaczania wartości logicznych zdań. Wyrzucenie nieokreśloności z pola rozważań automatycznie eliminuje predykat prawdy. To co jest warte uwagi to fakt, że wspomniana logika nie jest narzędziem czysto teoretycznym – model, w którym wartość logiczna może pozostać nieokreślona, jest wykorzystywany w wielu aplikacjach informatycznych (w szczególności w systemach bazodanowych). To akcentuje praktyczną stronę rozważań o związkach nieokreśloności z uniwersalnością.

6. Lokalny i globalny poziom opisu struktur funkcyjnych

Spróbujmy zinterpretować powyżej przedstawione przykłady. W każdym z nich rozważaliśmy strukturę, której elementy mogły przyjmować pewne wartości – w większości przypadków były to po prostu funkcje. Oprócz tego próbowaliśmy konstruować pewien opis uniwersalny całej struktury – funkcję, która w pewien sposób indeksowała elementy i pozwalała na ich wartościowanie oraz wykorzystywanie ich w obliczeniach. Przy takim postrzeganiu naszych przykładów w naturalny sposób wyróżnić można dwa poziomy:

- lokalny – na tym poziomie występują poszczególne elementy, posiadają pewne własności, które je charakteryzują oraz mogą być wykorzystane do uzyskiwania informacji o pojedynczych składowych struktury;
- globalny – w tym przypadku fundamentalny jest pewien mechanizm (zwykle zadany przez funkcję), który pozwala na zidentyfikowanie i wyliczenie wszystkich składowych struktury, własności tego mechanizmu opisują strukturę jako całość.

Budowa struktury, która będzie spełniać oczekiwania co do swoich możliwości poznawczych, wymaga zagwarantowania pewnych warunków na obu poziomach. Wydaje się oczywiste, że struktura powinna umożliwiać ewaluację swoich elementów (najlepiej dla wszystkich potencjalnych argumentów) oraz iż struktura powinna dawać gwarancję ustalenia, jakie elementy do niej należą. To prowadzi do następujących wniosków:

- podstawowe wymagania na poziomie lokalnym to całkowitość składowych funkcji;
- podstawowe oczekiwania na poziomie globalnym to istnienie (odpowiednio określonej) funkcji uniwersalnej.

W obu przypadkach stawiane wymagania wiążą się z maksymalizacją zasobu informacji, którą możemy wydobyć z takich systemów – pełna informacja o elementach struktury wymaga całkowitości jej dziedziny; pełna informacja o całej strukturze potrzebuje istnienia funkcji prezentującej wszystkie elementy struktury.

Wydaje się jednak, że zupełność analizowanego systemu wymaga jeszcze czegoś ponad wspomniane podstawowe własności. Aby struktura była w pełni zrozumiała, nie powinna się odwoływać do występujących poza nią elementów (co prowadziłoby do regresu do nieskończoności – aby zrozumieć strukturę S_1 musimy użyć składowych struktury S_2, aby nic nie pozostało niepowiedziane należy teraz wyjaśnić strukturę S_2, co jednak wymaga struktury S_3 i tak dalej). To oznacza, że frazę ‘w pełni zrozumiała' należy interpretować poprzez dodatkowe wymaganie – ‘zrozumiała w swoim obrębie'. Dla systemów funkcyjnych znaczy to, że funkcja uniwersalna dla struktury powinna mieć ten sam charakter co elementy struktury.

Rozważmy ten problem wracając do klasy funkcji obliczalnych. Zaczynając od zbioru funkcji obliczalnych i całkowitych nie jesteśmy w stanie zbudować całkowitej i obliczalnej funkcji uniwersalnej. Poszerzenie zbioru funkcji do funkcji częściowych (choć nadal obliczalnych w dziedzinie) pozwala na uzyskanie analogicznej funkcji uniwersalnej. W tym momencie możemy się zastanawiać nad selekcją tych indeksów, które dla tej nowej funkcji uniwersalnej reprezentują funkcje całkowite. Jednakże to wymaga odniesienia się do funkcji, których grafy[3]

[3] Graf funkcji to zbiór wszystkich możliwych par złożonych z argumentu i wyniku funkcji dla tego argumentu.

posiadają zupełnie inny charakter niż w przypadku funkcji obliczalnych. Porównanie sposobu konstrukcji różnych grafów (czyli relacji) prowadzi do budowy hierarchii arytmetycznej, w której funkcje obliczalne (ich grafy) znajdują się na poziomie zwanym Σ^0_1, zaś indeksy funkcji całkowitych tworzą zbiór poziomu Π^0_2. Rezygnując z badania całkowitości możemy zwrócić się ku jednoznaczności indeksów, czyli ku możliwości sprawdzenia, kiedy indeksy e_1, e_2 opisują te same funkcje: to znaczy $F_{\mathcal{PREC}}(e_1, ...)$ jest identyczne z $F_{\mathcal{PREC}}(e_2, ...)$. Tego rodzaju pogrupowanie indeksów ponownie wymaga odwołania się do relacji wyższego rzędu w hierarchii arytmetycznej (ponownie relacje klasy Π^0_2.). Kolejne uściślenia wymagań stawianych funkcjom mogą prowadzić je dalej wzwyż nieskończonej hierarchii arytmetycznej.

Jak widać brak zamknięcia opisu pewnej struktury wewnątrz tej struktury może prowadzić do obserwacji, że wiedza o analizowanej strukturze pozostaje otwarta i wymaga wprowadzania nowych pojęć wyższych poziomów – w ten sposób tworzą się hierarchie pojęć, które nie dają nam zamkniętego i samowyczerpującego się opisu zjawiska.

Być może nasze przykłady pokazują nieuniknioność zaistnienia w konstrukcji struktur matematycznych (a przynajmniej niektórych z nich) pewnego wentyla bezpieczeństwa – mianowicie pozostawienia pewnej nieokreśloności, która daje szanse na późniejsze określenia wartości elementu. W ten sposób unika się struktur w pełni statycznych, które nie dają możliwości na żaden wewnętrzny rozwój struktury.

Te nieprecyzyjne sformułowania wnoszą nowy wątek: problem rozróżniania składowych struktur matematycznych, które mają cechy dynamiczne lub statyczne. Bardzo intuicyjnie możemy zasygnalizować charakter takiego rozróżnienia:

- obiekt statyczny – element, którego własności mogą być w dowolnym porządku efektywnie testowane i dla którego istnieje możliwość badania przynależności składowych w skończonym czasie;
- obiekt dynamiczny – element, którego własności mogą być konsekutywnie wyliczane, a składowe generowane w kolejnych krokach pewnego procesu (być może nieskończonego).

Odwołując się do klasycznego paradygmatu platonizmu matematycznego można by zasugerować, że statyczne obiekty matematyki odpowiadają rzeczywistości platońskich przedmiotów matematyki – w pełni istniejących (w platońskim świecie) oraz całkowicie określonych co do swoich cech. Obiekty dynamiczne odpowiadałyby tej części matematyki, która opiera się na rzeczywistości posiadającej pewną swobodę istnienia i doboru własności jej przedmiotów – teorii, które przynajmniej w części są wytworem fantazji i wyobraźni matematyków. Rozróżnienie tych dwóch typów struktur matematycznych mogłoby inspirować ku zaproponowaniu sugestii, iż nie cała matematyka podlega jednemu paradygmatowi filozoficznemu – być może jej różne części posiadają inny status.

Wracając do aspektów statyczności i dynamiki w obrębie systemów funkcyjnych widzimy, że dla struktur pojętych w pełni statycznie pojawiają się wewnętrzne trudności. Przy wszystkich elementach określonych w sposób stabilny i pozwalający na pełne ewaluowanie wartości elementów, globalne podejście pozwala na konstrukcje nowych bytów matematycznych, które można – wykorzystując pełną informację o systemie – wprowadzić w stan sprzeczności ze szczegółami dotychczas rozważanej struktury. To pokazuje, że statyczność może grozić konfliktem pomiędzy sztywnym określeniem wszystkich parametrów struktury a potencjalnymi konsekwencjami modyfikacji odwołujących się do jej globalnych własności.

Patrząc z punktu widzenia struktur dynamicznych, w polu widzenia pojawia się aspekt nieokreśloności. Korzystając z przykładu funkcji obliczalnych, jako ilustrację tego typu struktur można wskazać zbiory rekurencyjnie przeliczalne. Ich sposób zdefiniowania (zakres funkcji całkowicie obliczalnych) gwarantuje generowanie kolejnych elementów w procesie określonym przez pewną funkcję – co jasno prezentuje je jako struktury dynamiczne. Warto zauważyć, że w tym przypadku zachodzi klasyczne twierdzenie.

Twierdzenie 19 *Klasa zbiorów rekurencyjnie przeliczalnych posiada zbiór uniwersalny, który jest zbiorem rekurencyjnie przeliczalnym.*

W pewnym sensie ta sytuacja pokazuje, że pozostawienie nieokreśloności (zbiór rekurencyjnie przeliczalny określa częściową dziedzinę pewnej funkcji obliczalnej) pozwala na pewną elastyczność systemu, która daje szanse na konstrukcje globalne niepozostające – ze względu na swobodę nieokreśloności – w sprzeczności z dotychczasowymi własnościami struktury. To sugeruje rozważenie pytania: na ile niezdefiniowanie funkcji można traktować nie jako defekt funkcji, ale na pozostawienie możliwości pewnych niezdeterminowanych wyborów przypisania wyniku?

Przechodząc do finalnych uwag pozostaje zauważyć, że rozważenie pytań o związki pomiędzy uniwersalnością a całkowitością w obrębie systemów funkcyjnych byłoby ułatwione poprzez przebadanie dalszych aspektów zagadnienia. Przede wszystkim warto byłoby rozszerzyć przykłady przez analizę innych działów matematyki (na przykład topologia i funkcje Baire'a). Ponadto warto byłoby się przyjrzeć potencjalnym konfliktom pomiędzy globalnymi a lokalnymi (czy dynamicznymi a statycznymi) własnościami systemów w innych naukach. Wydaje się, że interesującym tropem byłoby zwrócenie się do teorii kategorii w celu sformalizowania pojęcia dopasowania funkcji uniwersalnej do opisowanej przez nią struktury[4].

Szczególnie interesujące wydaje się tutaj odniesienie do fizyki. Klasycznym przykładem konfliktu określającego gra-

[4] Autor chciałby w tym miejscu wyrazić wdzięczność za tę sugestię oraz inne cenne uwagi anonimowemu Recenzentowi tego artykułu.

nice w procesie uściślania zdobywanych informacji jest zasada nieoznaczoności (cf. Hall, 2013). Powyższe rozważania pokazują, że pewne wyniki matematyczne można interpretować jako opis podobnej trudności w zdobywaniu informacji o strukturach matematycznych. To prowadzi do pytania, czy można postrzegać nieoznaczoność w fizyce jako pochodną konfliktu różnych aspektów opisu matematycznego zjawiska fizycznego. Tak więc być może to nie poziom fizyczny fenomenu, ale matematyka stwarzałaby (a co najmniej przyczyniałaby się do zaistnienia) niemożności otrzymania pełnej informacji poprzez metody badawcze. Istnieje też alternatywne wyjaśnienie, które w dynamicznych i statycznych aspektach opisu matematycznego dopatrywałyby się odbicia pewnych cech świata fizycznego (na przykład: dynamika – pęd, statyka – położenie przestrzenne) i stąd wspomniane konflikty w teoriach matematycznych byłyby konsekwencją jakiegoś powiązania teorii z rzeczywistością fizyczną.

Podsumowując można powiedzieć, że problem konstrukcji funkcji uniwersalnej dla zbiorów daje się postrzegać jako próba odwzorowania własności globalnych struktury, której elementy tworzą zasób informacji o lokalnych aspektach (elementach) całego zbioru. Patrząc poprzez ten pryzmat, w matematycznych wynikach dotyczących funkcji uniwersalnych można dostrzec zarys analizy problemu tworzenia samowyjaśniających się struktur, w których własności lokalne i globalne pozostają stosownie zharmonizowane. Powyżej zaprezentowane twierdzenia zdają się sugerować, że w naturze – przynajmniej niektórych – struktur matematycznych może znajdować się czynnik uniemożliwiający budowę systemów równocześnie dających dostęp do wszystkich szczegółowych własności jak i w pełni określonych oraz obejmujących całość rozważanego zbioru elementów.

Bibliografia

Bell, J.L., 2014. *Intuitionistic set theory.* London: College Publications.

Bolander, T., 2002. Restricted truth predicates in first order logic. In: *The logica 2002 yearbook.* Praha: Filosofia.

Chaitin, G., 2004. *Algorithmic information theory.* Cambridge: Cambridge University Press.

Hall, B.C., 2013. *Quantum theory for mathematicians*. New York et al.: Springer.

Hrbacek, K., Jech, T., 1999. *Introduction to set theory.* 3rd edition. Boca Raton, Fl.: Chapman & Hall/CRC.

Kharazishvili, A., 2005. *Strange functions in real analysis.* 2nd edition. Boca Raton, Fl.: Chapman & Hall/CRC.

Odifreddi, P., 1992. *Classical recursion theory: The theory of functions and sets of natural numbers*. Vol. I. Amsterdam: North Holland.

Rogers, H., 1987, *Theory of recursive functions and effective computability*. Mabridge, Mass.: MIT Press.

Shen, A., Vereshchagin, N., 2002. *Computable functions.* Providence, RI: American Mathematical Society.