Zagadnienia Filozoficzne
w Nauce
XLII (2008), 15–27

Krzysztof Wójtowicz
Zakład Logiki
Instytut Filozofii UW

ANTYREALISTYCZNA UCIECZKA W SFERĘ MOŻLIWOŚCI

Niniejszy esej poświęcony jest prezentacji w popularnej formie podstawowych założeń stanowisk antyrealistycznych z grupy, której naczelne hasło można sformułować jako „matematyka dotyczy sfery czystej możliwości”. Mam na myśli koncepcje Chihary i Hellmana. Obie te koncepcje opierają się na pojęciach modalnych, czynią to jednak w inny sposób. Mam nadzieję, że ta praca zachęci Czytelnika do bliższego zapoznania się z tą dyskusją (a może także do włączenia się w nią). Ograniczam się tu do prezentacji, ograniczając do minimum własny komentarz[1].

WSTĘP

Każdy człowiek w swoim życiu opanował pewną porcję matematyki — być może na poziomie niewiele wykraczającym poza tabliczkę mnożenia i elementarną geometrię, a być może na poziomie studiów uniwersyteckich. Wszyscy jednak potrafimy podać (mniej lub bardziej wyrafinowane) przykłady twierdzeń matematycznych, i wszyscy jesteśmy przekonani, że jest właśnie tak, jak te twierdzenia mówią. Jednak na pytanie, do czego właściwie odnoszą się te twierdzenia, możemy odpowiedzieć na różne sposoby. Realiści, przekonani

[1]Porównawczej analizie tych koncepcji poświęcona będzie oddzielna praca.

o tym, że twierdzenia matematyczne dotyczą pewnego obiektywnego porządku, powiedzą zapewne, że po prostu tak właśnie zachowują się obiekty matematyczne. Oczywiście, obiekty te nie są w żaden sposób postrzegalne, nie możemy ich zważyć ani zmierzyć. Istnieją — chciałoby się powiedzieć — w jakiś inny sposób, niż znane nam z doświadczenia codziennego stoły i krzesła. Nie ma sensu pytać o ich lokalizację ani o moment ich powstania. Obiekty matematyczne są abstrakcyjne, istnieją w sposób aczasowy i aprzestrzenny. Nie wchodzą w oddziaływania przyczynowe, więc w szczególności nie możemy ich poznać zmysłowo. Twierdzenia matematyczne mają walor obiektywności i pewności dzięki temu właśnie, że odnoszą się do tego niezmiennego, pozaczasowego świata tworów idealnych.

Myślę jednak, że stanowisko realistyczne, zakładające istnienie idealnych bytów matematycznych jest *prima facie* mniej wiarygodne niż stanowisko przeciwne. Realistyczne stanowisko budzi jednak zrozumiałe zastrzeżenia. Uważam tak, mimo iż sam jestem sympatykiem Stronnictwa Realistów. Muszą być zatem jakieś istotne argumenty na rzecz istnienia obiektów matematycznych — nie można ich istnienia przyjąć tak sobie *ad hoc*, tylko dlatego, że jest to koncepcja spójna i elegancka. Dlaczego, aby obliczyć koszt zakupów, albo skorzystać z rachunku różniczkowego dla obliczenia np. toru ruchu rakiety kosmicznej, mamy wierzyć w istnienie jakichś tajemniczych, idealnych, pozaczasoprzestrzennych, transcendentnych etc. bytów matematycznych? Czy gdyby pewnego dnia te obiekty abstrakcyjne zniknęły, utracilibyśmy zdolność liczenia?

Nic więc dziwnego, że nurty antyrealistyczne są bardzo silne i wpływowe we współczesnej filozofii matematyki. Stanowiska nominalistyczne występują w różnych wariantach, np. w postaci tzw. fikcjonalizmu[2]. W myśl tego ujęcia, matematyka nie jest niczym innym, jak pewną spójną opowieścią, oczywiście bardziej złożoną, niż bajka o Czerwonym Kapturku, ale — co do swojego statusu ontologicznego i epistemologicznego — podobną. Fikcjonalistyczne wyja-

[2]Ściśle rzecz biorąc jest to cała grupa stanowisk, tu jednak nie będę ich przedstawiał. Najważniejsi autorzy to Field i Balaguer ([Field 1980], [Balaguer 1998]).

śnienie wiąże się z pewnymi trudnościami — dotyczącymi chociażby tego, jak to się dzieje, że jedne bajki są przydatne w opisie działania silnika samochodowego (albo obliczenia trajektorii rakiety kosmicznej), a inne nie. Dlaczego akurat takie a nie inne teorie matematyczne (mające przecież status bajek) są przydatne przy opisie świata fizycznego, inne zaś nie? Z punktu widzenia stanowiska fikcjonalistycznego, te wszystkie teorie nie różnią się swoim statusem ontologicznym ani poznawczym: żadna z nich nie ma interpretacji, a wszystkie je poznajemy w taki sam sposób, jak życiorys Czerwonego Kapturka.

Tu chcę mówić o innej strategii i przedstawić podstawowe intuicje, jakie leżą u podłoża stanowisk, dla których punktem wyjścia jest oparcie się na pojęciach modalnych. Formułując to swobodnie, można powiedzieć że „modaliści" akceptują tezę, że matematyka nie dotyczy tak naprawdę obiektywnie istniejących bytów, ale jedynie sfery możliwości. Wiedza matematyczna nie dotyczy więc tego, co istnieje, ale tego, co jest możliwe. Oczywiście, modaliści są członkami Stronnictwa Antyrealistyczego: na pytanie o to, czy obiekty matematyczne istnieją, odpowiedzą negatywnie (zaś żartobliwie: „mogłyby — ale im się nie chce"). Autorami podstawowych w tym nurcie koncepcji są Chihara i Hellman ([Chihara 1990], [Hellman 1989]).

1. LINGWISTYCZNY ANTYREALIZM CHIHARY

Filozoficzne *credo* Chihary wyraża się słowami: „Podstawową ideą w moim podejściu jest stworzenie systemu matematycznego, w którym twierdzenia egzystencjalne tradycyjnej matematyki zostaną zastąpione twierdzeniami dotyczącymi konstruowalności: tam, gdzie w tradycyjnej matematyce twierdzi się, że taki-to-a-taki obiekt istnieje, w tym systemie pojawią się twierdzenia dotyczące konstruowalności" [Chihara 1990, 25]. Chihara odrzuca zatem stanowisko realistyczne (w szczególności zdecydowanie krytykuje pochodzący od Quine'a, a szeroko dyskutowany we współczesnej literaturze argument z niezbędności). Chihara docenia znaczenie problemu stosowalności, i konieczność wyjaśnienia tego problemu w każdym dojrzałym systemie filozoficznym. Stawia sobie zatem za cel wyjaśnienie faktu, w jaki sposób matematyka pozbawiona przedmiotowego odniesienia może stosować się do opisu rzeczywistości. Odrzuca wyjaśnienie fikcjonalistyczne, w myśl którego zdania matematyki mają podobny status jak wypowiedzi o krasnoludkach. Chihara zwraca uwagę na to, że uznanie, iż fałszywe zdania dotyczące fikcyjnych bytów mogą mieć fundamentalne znaczenie dla rozwoju nauki jest filozoficznie bardzo kłopotliwy. Nie godzi się także na (pozornie) łatwe rozwiązanie formalistyczne, w myśl którego matematyka to pozbawiona pozajęzykowego odniesienia gra symboli. Chihara bowiem broni stanowiska, w myśl którego twierdzenia matematyczne są prawdziwe, choć nośnikiem (*truth-maker*) tej prawdziwości nie są abstrakcyjne byty matematyczne. Uznanie prawdziwości zdań matematycznych nie nakłada więc na nas obowiązku uznania istnienia obiektów matematycznych. Jest to zatem zabieg, który pozwala nam zachować fundamentalną kategorię prawdy matematycznej, nie wikłając się jednak w kłopotliwe założenia dotyczące ontologii dla matematyki. Takie stanowisko bywa w literaturze określane jako „realizm co do wartości logicznej" i zarazem „antyrealizm co do ontologii".

W swojej głównej pracy Chihara przedstawia kilka systemów. Techniczna strona tego zagadnienia jest dość żmudna[3], ciekawa jest natomiast zasadnicza idea, która kryje się za sposobem myślenia Chihary. Ilustruje on ją za pomocą znanej gry w konstruowanie tangramów: z kwadratu pociętego na 7 kawałków (trójkąty, kwadrat i romb) można układać różne figury (tangramy). Mogą być to zwykłe figury geometryczne, litery etc. Hipotetyczna teoria tangramów dotyczyłaby m.in. możliwości skonstruowania tangramów odpowiedniego typu (np. w kształcie litery T), zaś twierdzenia przybierałyby postać „Możliwe jest skonstruowanie tangramu takiego, że...". Ta intuicja — zdaniem Chihary — winna być także zastosowana w odniesieniu do matematyki. Zdania egzystencjalne matematyki winny być bowiem interpretowane właśnie w duchu kwantyfikatora konstruowalności (wyraża-

[3]Zainteresowany Czytelnik znajdzie szczegółowy opis techniczny np. w [Wójtowicz 2003].

jącego możliwość przeprowadzenia konstrukcji), a nie w duchu tez o absolutnym istnieniu[4]. Stwierdzenie, iż możliwe jest przeprowadzenie konstrukcji pewnego tangramu nie znaczy przecież wcale, iż taki tangram faktycznie istnieje. Możliwość konstrukcji nie implikuje tego, że została ona faktycznie przeprowadzona. Chihara twierdzi, że podobna sytuacja ma miejsce w wypadku wypowiedzi matematycznych.

Według Chihary, zdania matematyczne swoją prawdziwość zawdzięczają możliwości wykonania pewnych konstrukcji językowych. Nośnikiem prawdy matematycznej jest właśnie ta możliwość. W miejsce twierdzeń egzystencjalnych (np. „istnieje liczba naturalna, rzeczywista, etc.") pojawiają się tezy dotyczące konstruowalności pewnych zdań w odpowiednio zdefiniowanych językach. Odwołanie do pojęć modalnych („możliwe jest skonstruowanie zdania takiego, że...") pozwala na przypisanie zdaniom matematycznym wartości logicznej (a samej matematyce na zachowanie interpretacji, choć oczywiście interpretacji innej, niż chcą tego realiści).

Odwołując się do używanej przez Chihary ilustracji tangramów, powiedzielibyśmy, że w ramach systemów Chihary można mówić zarówno o poszczególnych elementach, z których tworzymy nowy tangram, jak i o możliwych do skonstruowania tangramach. Możemy mówić oczywiście o istnieniu kawałków tangramu (one są dane i ich nie musimy konstruować), i do nich będziemy odnosić się za pomocą zwykłych kwantyfikatorów. Nie możemy natomiast mówić o istnieniu tangramów, a jedynie o ich konstruowalności[5].

Należy wyraźnie podkreślić, że Chihara mówiąc o konstruowalności nie ma bynajmniej na myśli konstruowania obiektów matematycznych, ale konstruowanie samych wypowiedzi (zdań) matematycznych. „W sensie, w jakim używam kwantyfikatorów konstruowalności, nie wiem, co by to miało znaczyć, iż możliwe jest skonstruowanie liczby czy zbioru" [Chihara 1990, 41]. Konstruowalność dotyczy tzw.

[4]„[I]stnienie w matematyce będzie zawsze wyrażane za pomocą kwantyfikatorów konstruowalności" [Chihara 1990, 39].

[5]Te intuicje znajdują oczywiście swoje formalne odbicie w składni i semantyce tworzonych przez Chiharę systemów.

zdań otwartych (to techniczne pojęcie systemu Chihary), zaś tezy dotyczące konstruowalności mają postać: „możliwe jest skonstruowanie zdania otwartego takiego, że...” i dotyczą możliwości wykonania ciągu pewnych czynności przez użytkowników języka (w tym przypadku — języka matematycznego). Nie ma znaczenia, jaka jest fizyczna realizacja tej wypowiedzi (czy jest to napis, ciąg gestów czy innych znaków [Chihara 1990, 40]). Zdania otwarte konstruowane są w tzw. logicznej przestrzeni zdań otwartych. Należy jednak podkreślić, że mówienie o tej logicznej przestrzeni ma charakter czysto heurystyczny — nie jest bowiem postulowane istnienie tej przestrzeni jako obiektu.

Konstruowalność w systemie Chihary jest pojęciem bardzo szerokim, nie powinniśmy utożsamiać go bynajmniej z restryktywnym rozumieniem matematycznych konstruktywistów. Chihara nie nakłada na klasę konstruowa(l)nych zdań w zasadzie żadnych warunków. To podejście jest to do tego stopnia liberalne, że nie żąda nawet, abyśmy byli w stanie podać warunki prawdziwości dla tych zdań czy abyśmy mogli je zrozumieć.

Prezentując swoją koncepcję, Chihara dla uwypuklenia intuicji posługuje się analogią geometrii euklidesowej. Zdaniem Chihary, stwierdzenie, iż możliwa jest np. konstrukcja prostej o określonych cechach jest w gruncie rzeczy jedynie stwierdzeniem, że natura przestrzeni geometrycznej nie wyklucza takiej konstrukcji — innymi słowy, że w przestrzeni geometrycznej jest miejsce na taką prostą [Chihara 1990, 49]. Chihara twierdzi, że nasze przekonanie o istnieniu odpowiedniej prostej ma swoje źródło właśnie w tym, że jest ona konstruowalna. Proponuje więc, aby odwrócić sposób myślenia: zamiast o istnieniu prostej, mówić jedynie o jej konstruowalności. To samo dotyczy wszystkich figur geometrycznych, a zatem rozumując w ten sposób, geometrię euklidesową będziemy mogli interpretować jako teorię dotyczącą wykonalności pewnych konstrukcji. W ten sposób uwolnimy się od bagażu ontologicznego, złożonego z abstrakcyjnych figur geometrycznych (nie tracąc jednak wyników matematycznych).

Koncepcja Chihary oparta jest na wykorzystaniu pojęć modalnych (chodzi bowiem o możliwość przeprowadzenia pewnej konstrukcji).

Jednak odwołania do pojęć modalnych nie niosą za sobą żadnych zobowiązań dotyczących ontologii. Chihara odwołuje się do analogii z wypowiedzią dotyczącą np. możliwości zbudowania w danym miejscu domu o odpowiedniej charakterystyce: to, że można taki dom zbudować (i że jest to zdanie prawdziwe!) nie znaczy bynajmniej, że faktycznie istnieje taki dom [Chihara 1990, 39]. Chihara nie twierdzi więc, że possybilia istnieją w jakimkolwiek sensie, jednak — jako narzędzie heurystyczne — można się do nich odwoływać w wyjaśnianiu roli matematyki w nauce[6]. Teoria przestrzeni logicznej zdań otwartych pozwala na eliminację założeń o istnieniu obiektów abstrakcyjnych, pozwalając na rekonstrukcję niezbędnych w zastosowaniach technik [Chihara 1990, 94].

2. MODALNY STRUKTURALIZM HELLMANA

Zasadniczy cel Hellmana jest taki sam jak Chihary (i jest to cel wspólny dla wszystkich przedstawicieli stanowiska antyrealistycznego): chodzi o eliminację założeń ontologicznych dotyczących istnienia abstrakcyjnych obiektów matematycznych. Warto podkreślić, że główna praca Hellmana nosi tytuł *Mathematics Without Numbers,* co stanowi wyraźne nawiązanie do głównej pracy Fielda *Science Without Numbers*[7]. Jednak Hellman wybiera zupełnie inną metodę niż Field. W przeciwieństwie do Fielda akceptuje tezę dotyczącą niezbędności matematyki w naukach empirycznych i nie stara się jej podważać[8]. Wprost przeciwnie, fakt ten uważa za podstawowy dla dyskusji filozoficznej. Hellman (podobnie jak Chihara) zgadza się z tezą, że zdania matematyczne mają wartość logiczną (niezależnie od naszych zdolno-

---

[6]Chihara jest konsekwentnym antyrealistą także w odniesieniu do possybiliów — inaczej niż modalni realiści (np. Lewis), nie uważa możliwych światów za istniejące w jakimkolwiek sensie.

[7]Hellman analizuje dość szczegółowo stanowisko Fielda i poświęca sporo uwagi porównaniu swojej koncepcji z koncepcją Fielda.

[8]Zdaniem Fielda, zdania matematyczne mają status wypowiedzi o użytecznych fikcjach. Szkicuje program wykazania zbędności matematyki w nauce opierający się na odpowiednich, tzw. jakościowych wersji teorii fizycznych.

ści poznawczych). Tym oczywiście różni się od fikcjonalistów. Jednak sam fakt uznania, że zdania matematyki mają wartość logiczną nie znaczy jego zdaniem bynajmniej, że istnieją obiekty matematyczne (czyli nie musimy przyjmować klasycznej, referencyjnej koncepcji prawdy w odniesieniu do zdań matematycznych). Celem Hellmana jest sformułowanie koncepcji, w której zostanie zachowana kategoria prawdziwości, ale nie kosztem przyjęcia silnych i nieakceptowalnych dla antyrealisty założeń ontologicznych. Podobnie więc jak Chihara, Hellman jest realistą co do wartości logicznej, zaś antyrealistą co do ontologii[9].

Jednak Hellman zajmuje stanowisko zdecydowanie różne od stanowiska Chihary w kwestii oceny argumentacji Quine'a. Hellman uważa punkt widzenia Quine'a za dobry klucz do wyjaśnienia problemu źródeł wiedzy matematycznej. Fakt zastosowań uważa (podobnie jak Quine) za podstawowy dla dyskusji filozoficznej, choć oczywiście nie zgadza się z realistycznym stanowiskiem Quine'a. Pod tym względem Hellman przypomina więc Fielda, który również uważał argumentację Quine'a za niezwykle ważną dla dyskusji, zaś różni się od Chihary.

Koncecja Hellmana czerpie inspiracje z dwóch podstawowych źródeł: (i) idei wykorzystania pojęć modalnych dla eliminacji zobowiązań ontologicznych; (ii) idei strukturalistycznego postrzegania matematyki. Zaś zasadnicza teza Hellmana dotycząca statusu matematyki może zostać wyrażona słowami: „matematyka to swobodne badanie strukturalnych możliwości w ramach odpowiednich środków dedukcyjnych" [Hellman 1989, 6]. Obiekty matematyczne nie istnieją, zaś matematyka dotyczy możliwych struktur.

Nie ma tu miejsca na szczegółowe analizy dotyczące strukturalizmu matematycznego. Na nasze potrzeby wystarczy zauważyć, że stanowisko strukturalistyczne różni się od stanowiska klasycznego, „obiektowego" realizmu matematycznego w kwestii natury obiektów matematycznych, ale nie w kwestii istnienia tych obiektów. Jednak strukturalistyczne inspiracje nie prowadzą Hellmana do akceptacji tezy realizmu matematycznego, ale raczej do pewnej wersji antyrealizmu (o charakterze modalnym). Hellman odwołuje się tu do punktu widze-

[9]Różni się pod tym względem od Fielda i innych fikcjonalistów.

nia Putnama ([Putnam 1967]). Zdaniem Putnama, jeśli zamiast mówić o obiektach matematycznych będziemy mówić o pewnych możliwościach, będziemy mogli wyeliminować zobowiązania ontologiczne nie płacąc jednak za to zbyt wysokiej ceny[10]. Pojęcia modalne uznamy za pierwotne (a więc nie zdefiniowane w semantyce teoriomnogościowej, obciążonej zobowiązaniami ontologicznymi), i to one umożliwią nam reinterpretację zdań matematycznych. Hellman podąża tym tropem, formułując tzw. modalno-strukturalistycze interpretacje dla teorii matematycznych. W swojej pracy podaje takie interpretacje (rekonstrukcje) dla arytmetyki liczb naturalnych, arytmetyki liczb rzeczywistych i teorii mnogości. Nie interesują nas tu szczegóły techniczne, zatem ograniczę się tu do przedstawienia (na przykładzie teorii liczb, od której Hellman rozpoczyna swoje badania) jedynie pewnych podstawowych cech tej koncepcji.

Zasadniczy pomysł Hellmana polega na podaniu stosownych parafraz klasycznych zdań arytmetycznych jako warunkowych zdań modalnych. W standardowej, realistycznej interpretacji, zdania dotyczące liczb rozumiane są jako zdania o pewnych obiektach, zaś ich prawdziwość rozumiana jako zgodność z pewną pozajęzykową dziedziną[11]. Hellman natomiast podaje modalne odpowiedniki tych klasycznych zdań. Jest to tzw. składowa hipotetyczna: wypowiedzi o liczbach przybierają formę „gdyby istniał pewien ω-ciąg[12], to zachodziłoby w nim zdanie α", zamiast „zdanie α jest prawdziwe w klasie liczb natural-

[10] Taką cenę płacą np. formaliści, twierdzący iż cała matematyka to gra niezinterpretowanych symboli. To pozornie proste wyjaśnienie rodzi jednak cały szereg trudności o charakterze filozoficznym, dotyczących np. problemu intuicji matematycznej czy roli matematyki w naukach empirycznych.

[11] Nie musi chodzić tu o model w sensie technicznym (nasze intuicje dotyczące np. dotyczące prawdziwości zdań teorioliczbowych nie są sformułowane na ogół w terminach spełniania w strukturze relacyjnej). Ważne jest to, że mówimy tutaj o prawdziwości w zwykłym, korespondencyjnym sensie tego słowa.

[12] Mówiąc o ω-ciągu mamy po prostu ciąg o strukturze liczb naturalnych, czyli: 0,1,2,3....

nych”[13]. Ogólnie, w interpretacji modalno-strukturalistyczej, zamiast mówić o tym, że zdanie α jest prawdziwe, mówi się o tym, że zdanie α byłoby prawdziwe w strukturze odpowiedniego typu — gdyby taka struktura istniała.

Oprócz składowej hipotetycznej, rekonstrukcja Hellmana zawiera tzw. składową kategoryczną, która nie ma charakteru warunkowego, ale mówi o możliwości istnienia pewnych struktur[14]. Hellman uzasadnia tę zasadę odwołując się do subtelnych rozważań dotyczących potencjalnej nieskończoności. Odwołanie się do obu tych składowych (hipotetycznej i kategorycznej) pozwala Hellmanowi na sformułowanie koncepcji wyjaśniającej naturę prawdy matematycznej, zachowanie pojęcia prawdy, a jednocześnie wyjaśnienie roli matematyki w naukach empirycznych i faktu niezbędności matematyki. W ujęciu Hellmana, miejsce tez egzystencjalnych zajmują tezy o charakterze modalnym, wyrażające możliwość istnienia struktur odpowiedniego typu, oraz konieczności zachodzenia w tych strukturach odpowiednich zdań. Trzeba podkreślić, że Hellman mówiąc o możliwości istnienia struktur nie wygłasza tez egzystencjalnych dotyczących istnienia possybiliów. Zdania te nie stwierdzają bowiem istnienia możliwych struktur, ale jedynie możliwość istnienia struktur.

Można wskazać szereg wspólnych cech stanowisk Chihary i Hellmana, z których najbardziej oczywistą jest ta, że obaj są antyrealistami, zaś w swoich programach odwołują się do pojęć modalnych. Podobieństw jest jednak więcej. Obaj uważają, że matematyka ma obiektywny charakter, który nie jest zależny od działalności matematyków. Obaj też uważają za zasadne posługiwanie się kategorią prawdy matematycznej (co odróżnia ich od fikcjonalistów), choć oczywiście interpretują tę kategorię na swój sposób (rzecz jasna, niezgodny z in-

[13]Strukturaliści myślą o liczbach nie jako o obiektach wyposażonych w pewną wewnętrzną naturę, ale jako o miejscach w pewnej strukturze. Dlatego mówią o ω-ciągu, a nie o klasie liczb naturalnych (traktowanych jako obiekty).

[14]W przeciwnym razie zdanie typu „gdyby struktura X była ω-ciągiem, to prawdziwe byłoby w niej zdanie α”, w przypadku gdyby faktycznie nie istniała struktura X, byłoby pusto spełnione dla dowolnego zdania α, co jest sprzeczne z intuicjami. Dlatego potrzebna jest składowa kategoryczna.

terpretacją klasyczną). Swobodnie mówiąc, obaj wygłaszają podobną preambułę filozoficzną, natomiast sama realizacja i strategie uzasadnienia ich koncepcji jest istotnie różne.

Hellman i Chihara w różny sposób oceniają argument z niezbędności Quine'a. Chihara odrzuca koncepcję, w myśl której na identyfikację ontologii pozwala kryterium kwantyfikatorowe. To kryterium uważa bowiem za zależne od (jego zdaniem niewiarygodnej) tezy, iż to logika pierwszego rzędu jest „prawdziwą" logiką, pozwalającą na przedstawienie teorii w postaci kanonicznej, ujawniającej jej prawdziwą strukturę (i również jej zobowiązania ontologiczne). Metateoretyczne analizy w duchu Quine'a nie pozwalają — zdaniem Chihary — rozwiązać problemu istnienia obiektów matematycznych (który winien być raczej „atakowany" za pomocą metod nauk empirycznych). Hellman natomiast akceptuje kwantyfikatorowe kryterium istnienia Quine'a, zaś sam argument z niezbędności uważa za ważny argument na rzecz matematycznego realizmu. Konsekwentnie więc dba o to, aby w swojej koncepcji unikać kwantyfikacji po możliwych obiektach (possybiliach).

Zarówno Hellman, jak i Chihara zachowują kategorię wiedzy matematycznej. Wiedza ta nie dotyczy jednak ani składniowych własności systemów symbolicznych (jak chcą formaliści), ani „królestwa abstraktów" (jak chcą realiści), nie dotyczy też fikcji (jak chcą fikcjonaliści). Zdaniem Hellmana, tezy matematyczne dotyczą możliwości istnienia pewnych struktur oraz tego, że pewne fakty są konieczne w odpowiednich strukturach. Natomiast zdaniem Chihary zdania matematyczne należy interpretować jako wypowiedzi, które głoszą wykonalność pewnych konstrukcji językowych. Choć więc obaj autorzy odwołują się do pojęć modalnych, to jednak czynią to w zupełnie inny sposób, i — można powiedzieć — są to modalności innego typu. Żaden z nich nie jest też modalnym realistą (w duchu np. Lewisa): mówienie o możliwych światach stanowi dla jedynie zabieg o charakterze heurystycznym; żaden z nich nie przyjmuje też istnienia possybiliów.

Inna jest też rekonstrukcja formalna. Chihara proponuje własne systemy (dość odległe od codziennej praktyki matematycznej), Hellman natomiast podaje modalne rekonstrukcje standardowych teorii matematycznych. Rekonstrukcja Chihary nie ma związku z problemem stosowalności, natomiast Hellman ten fakt uwzględnia, analizując potrzeby konkretnych teorii empirycznych.

W mojej ocenie, koncepcja Hellmana jest znacznie dojrzalsza zarówno pod względem argumentacji filozoficznej, jak i rekonstrukcji formalnej. Uważam też, że jest zdecydowanie łatwiejsza do zaakceptowania z punktu widzenia praktyki matematycznej oraz potrzeb teorii empirycznych. Jako sympatyk obozu Realistów, uważam Hellmana za znacznie ciekawszego (a przez to bardziej groźnego) przeciwnika niż Chiharę.

LITERATURA

Balaguer M.
[1998] *Platonism and Anti-Platonism in Mathematics*, New York, Oxford: Oxford University Press.

Chihara C.
[1990] *Constructibility and mathematical existence*, Oxford: Clarendon Press.

Field H.
[1980] *Science Without Numbers*, Oxford: Basil Blackwell.

Hellman G.
[1989] *Mathematics without Numbers*, Oxford: Clarendon Press.

Putnam H.
[1967] „Mathematics without foundations”, *Journal of Philosophy* 64, 5–22.

Wójtowicz K.
[2003] *Spór o istnienie w matematyce*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe Semper.

SUMMARY

ANTIREALIST ESCAPE IN A REALM OF POSSIBILITIES

The article is devoted to a popular presentation of two important styles of thinking concerning the problem of existence of mathematical objects: Chihara's linguistic constructivism, and Hellman's modal structuralism. According to Chihara, mathematical statements should be interpreted as referring to certain linguistic construction; according to Hellman, mathematics is the science of possible structures. The motivations and main ideas are examined (without going into technical details), and the similarities and differences between these two viewpoints are highlighted.