Zagadnienia Filozoficzne
w Nauce
XLVIII (2011), 127–147

Piotr Błaszczyk
Instytut Matematyki, Uniwersytet Pedagogiczny, Kraków
Kazimierz Mrówka
Instytut Filozofii, Uniwersytet Pedagogiczny, Kraków

MIĘDZY OCZYWISTOŚCIĄ A DEDUKCJĄ. PLATON I EUKLIDES O RÓWNOŚCI

Wśród matematyków wywodzących się z tradycji Hilberta i badających *Elementy* przyjmuje się, że w geometrii Euklidesa pojęcie równości ma dwa znaczenia: przystawanie oraz równość pól.[1] Rozróżnienie to służy przede wszystkim rozjaśnieniu zawiłości, jakie pojawiają się wtedy, gdy tezy Euklidesa są wprost przenoszone w kontekst matematyki współczesnej. W niniejszym artykule idziemy o krok dalej i wskazujemy na filozoficzne znaczenie tej różnicy.

Równość pojęta jako przystawanie jest czymś oczywistym, wręcz niezauważalnym i u Platona nie jest ona przedmiotem odrębnych dociekań. Analizując dialogi *Fedon*, fragment 74b-c, oraz *Menon*, 81e-85d, możemy jednak wydobyć pewne jej rozumienie. Otóż Platon jako najzupełniej oczywiste przyjmuje, że (1) równość zachodzi między dwoma przedmiotami, że (2) to, co równe nie może być nierówne, że (3) na terenie geometrii równość jest przystawaniem. Podejście takie jest dość bliskie współczesnemu stanowisku i chyba dlatego nie zostało zauważone jako odrębny problem, a Platona uwagi o równości nie stały się — o ile nam wiadomo — przedmiotem odrębnych analiz.[2]

[1]Zob. (Hartshorne, s. 40–43, 196–224), (Artmann, s. 37–38).

[2]W niniejszym tekście zajmuje nas równość w geometrii. W związku z poglądami politycznymi Platona zwraca się uwagę na odróżnienie równości arytmetycznej i geo-

Zupełnie odmienny obraz wyłania się z Księgi I *Elementów*. Przede wszystkim równość jest dla Euklidesa problemem, bo charakteryzuje ją aksjomatami. Konsekwencje aksjomatów są natomiast takie, że obok przystawania zyskuje równość jeszcze drugie znaczenie, które oddajemy zwrotem „równość pól”. W rezultacie może być tak, że to co nierówne dla zwykłego oglądu — nierówne, bo nieprzystające, *różnego kształtu* — może być równe w tym drugim znaczeniu. Na pojęciu „równości pól” oparta jest Euklidesa teoria pola wielokątów oraz teoria figur podobnych. Mając to na uwadze mówimy, że matematyka zaczyna się tam, gdzie kończy się zwykły ogląd.

I jeszcze słowo o oczywistości i dedukcji występujących w tytule artykułu. Pojęć tych nie będziemy definiować. Wzorem pierwszego podejścia, wzorem odwołania do oczywistości i zwykłego oglądu jest dla nas lekcja geometrii z *Menona*, wzorem dedukcji są rozumowania Euklidesa.

1. W *Uczcie* podaje Platon syntetyczny opis drogi do istoty piękna:

> Bo tędy biegnie naturalna droga miłości, czy kto sam po niej idzie, czy go kto drugi prowadzi: od takich pięknych ciał z początku ciągle się człowiek ku temu pięknu wznosi, jakby po szczeblach wstępował: od jednego do dwóch, a od dwóch do wszystkich pięknych ciał, a od ciał pięknych do pięknych postępków, od postępków do nauk pięknych, a od nauk aż do tej nauki na końcu, która już nie o innym pięknie mówi, ale człowiekowi daje owo piękno samo w sobie; tak że człowiek dopiero przy końcu istotę piękna poznaje (*Uczta* 211b-c).

Tak więc od pięknego ciała, do wszystkich pięknych ciał, i dalej, *via* piękne czyny i nauki, do piękna samego w sobie. Platon uczy, że do istoty nie dociera się przez uogólnianie, pomijanie *nieistotnych* cech, ale na drodze przypominania: najpierw kieruje nami pewne mgliste przeczucie, a z czasem, na każdym kolejnym etapie, coraz wyraźniejsze rozumienie piękna, aż po bezpośredni ogląd piękna samego w sobie.

---

metrycznej, czy inaczej proporcjonalnej — zob. *Prawa* VI, 757b-c, *Gorgiasz*, 508a — i tej kwestii, owszem, poświęcono wiele opracowań. Ale „równość geometryczna” nie ma związku z równością w geometrii.

Podobny schemat, ale w odniesieniu do równości matematycznej znajdujemy w *Fedonie*, w dialogu Sokratesa z Simmiasem:

> „Mówimy wszak, że jest coś takiego jak równość. Nie chodzi mi tu o równość dwóch kawałków drzewa czy kamieni ani o nic innego tego rodzaju, ale o coś, co od tych wszystkich rzeczy się odróżnia, o równość samą. Powiemy, że jest coś takiego, czy też, że nie ma?"
> „Powiemy przecież, na Zeusa — odparł Simmias — z całą pewnością".
> „A czy wiemy również, czym jest owa rzecz sama?"
> „Wiemy"– odpowiedział.
> „Skąd wzięliśmy wiedzę o tym? Przecież nie z tych rzeczy, o których przed chwilą mówiliśmy, z kawałków drewna, kamieni i innych przedmiotów równych; nie z tych rzeczy pojawiła się w naszej myśli ta rzecz, która się od nich odróżnia. A może nie wydaje ci się ona różną? Spójrz na to tak. Czy równe kawałki drewna lub kamienie, pozostając takie same, wydają się jednemu równe, a innemu nierówne?"
> „Oczywiście".
> „No dobrze, a czy wydały ci się kiedykolwiek równości same nierówne, bądź równość nierównością?"
> „Ależ nigdy, Sokratesie".
> „Jednakże — powiedział — to przecież z tych rzeczy równych, różnych od owej równości, ująłeś w myśli i pojąłeś wiedzę o niej?"
> „Masz zupełną rację".
> „W takim razie owe rzeczy równe i równość sama nie są tym samym" (*Fedon*, 74b-c).

Platon oczywiście nie poprzestaje na wskazaniu idei równości. Równość jest tu środkiem, celem jest wytworzenie przekonania o istnieniu wiedzy wrodzonej, co później jest wykorzystywane w dowodzie nieśmiertelności duszy.

Dojście do idei równości jest jednak trochę bardziej skomplikowane niż droga do piękna samego. Otóż w przejściu od równych przedmiotów do równości samej pojawia się zagadkowy człon pośredni: „równości same", lub — co wydaje się bliższe oryginałowi — „równe same". Miast jednej idei, która jest miarą jakiejś własności — np. piękna, czy sprawiedliwości — spotykamy tu nietypową dla Platona triadę: równe przedmioty — równości same (równe same) — równość sama. Stąd zdanie „czy wydały ci się kiedykolwiek równości same nierówne, bądź równość nierównością?” obrosło licznymi komentarzami. Wielu próbowało wyjaśnić, dlaczego Platon stosuje tu liczbę mnogą — „równości same” („równe same”). Po wielokroć i z różnych perspektyw prześwietlono rzeczony fragment. W rezultacie wykrystalizowało się kilka koncepcji; jedne natury filozoficznej, inne historycznej czy filologicznej. Część interpretatorów uznaje, że „równości same” („równe same”) to równości matematyczne, a na dowód przywołują oni *Elementy* Euklidesa. I tak na przykład M.F. Cornford, uznany badacz Platona, wskazując na „równe” w pierwszym aksjomacie z grupy *Pojęcia Wspólne* pisze:

> *Gdy równe są dodane do równych, to całości są równe*. «Równe» oznacza tu wielkości, o których nie orzeka się niczego więcej ponad to, że są one po prostu «równe» i powiedzieć, że takie równe są nierówne, to wewnętrzna sprzeczność i oczywisty fałsz (Cornford, s. 71).

Poprzestaniemy na tej jednej propozycji rozwiązania zagadki, dlaczego w *Fedonie* 74c1 Platon używa pojęcia „równości same”, bo naszym celem nie jest przedstawianie kolejnej interpretacji. Z omawianego fragmentu chcemy raczej wyłuskać Platona rozumienie równości. Śledząc dyskusję toczoną wokół zdania 74c1 uderzyło nas bezkrytyczne podejście komentatorów do platońskiego ujęcia równości, co widać chociażby w cytowanych wyżej słowach Cornforda, który nie tyle interpretuje, co wtóruje słowom mistrza. Otóż jako najzupełniej oczywiste przyjmuje się za Platonem, że (1) równość matematyczna zachodzi między dwoma przedmiotami, że (2) to, co równe nie może być nierówne. Tak bynajmniej nie jest — tak nie jest u samego Euklidesa i to już wystarczy, aby przyjrzeć się bliżej zagadnieniu równości.

Zanim przejdziemy do Euklidesa spójrzmy, tytułem wstępnego porównania, na równość we współczesnej matematyce, jest bowiem istotna różnica w traktowaniu równości między matematyką dzisiejszą, a tym, co znajdujemy w *Elementach*. W komentarzach do Platona dominuje natomiast perspektywa współczesnej matematyki.

2. Z punktu widzenia podstaw matematyki, gdy rozważamy teorie sformalizowane, równość (a) może być potraktowana jako symbol logiczny oznaczający identyczność, (b) może być zaliczona do relacji pierwotnych systemu i wówczas jest charakteryzowana przez aksjomaty, (c) może być wreszcie wprowadzona definicją. W każdym przypadku musi być zwrotna, symetryczna, przechodnia oraz spełniać prawo podstawiania.[3] I właśnie zwrotność odróżnia dzisiejsze podejście od ujęcia Platona. U Platona równość jest związkiem między dwoma przedmiotami x, y. W teorii mnogości, gdy przedstawiamy ją jako relację w zbiorze X, składa się z par $\langle x, x\rangle$. Zapisując parę uporządkowaną jako zbiór dostaniemy $\langle x, x\rangle = \{\{x\}\}$ i już wyraźnie mamy tylko jeden przedmiot. Zwrotność jest jednak ideą obcą całej matematyce greckiej, tak więc w tym punkcie Platon nie odstaje od Euklidesa.

Definiowanie równości jest częstym zabiegiem i zwykle wiąże się z relacją równoważności; dla przykładu niech to będzie relacja polegająca na tym, że liczby naturalne dają tę samą resztę przy dzieleniu przez 2. Opisowo i w pewnym uproszczeniu można to tak przedstawić: dwa przedmioty różne są równe pod pewnym względem, są równe z uwagi na pewien aspekt, a ów wzgląd, czy aspekt wyznacza właśnie odpowiednia relacja równoważności; w naszym przykładzie będzie tak, że wszystkie liczby parzyste są sobie równe i wszystkie liczby nieparzyste są sobie równe. Podobny zabieg znajdujemy w Księdze V *Elementów*, w definicji równości stosunków, ale wówczas Euklides mówi nie o równych, tylko o „tych samych" stosunkach.[4]

Pojęcie aspektu pozwala opisać także i takie sytuacje, gdzie trójkąt i prostokąt są sobie równe, mianowicie co do pola, czy inaczej: gdy ich pola są równe, lub gdzie na podstawie izomorfizmu *utożsamiane są* — jak mówią matematycy — struktury algebraiczne. Jednak ściśle rzecz biorąc nie znajdujemy we współczesnej matematyce sytuacji, gdzie to, co równe jest nierówne: 2 jest różne od 4, a z uwagi na wyżej wspomnianą relację liczby te są równoważne (równe *ex definitione* są natomiast klasy abstrakcji wyznaczone przez 2 i 4), trójkąt nie jest równy prostokątowi, ale pole trójkąta może być równe polu prostokąta.

[3]Zob. np. (Fraenkel et al., s. 25–27).

[4]Zob. Błaszczyk, *O definicji 7 z Księgi V* Elementów *Euklidesa*.

W *Elementach* jest inaczej: w twierdzeniu I.42 Euklides pokazuje, jak skonstruować prostokąt, czy ogólniej „równoległobok równy danemu trójkątowi", a więc nie prostokąt o równym polu, ale prostokąt zwyczajnie równy trójkątowi. Jak zatem Euklides dochodzi do tego, że trójkąt może być równy prostokątowi?

3. W *Elementach* równość jest *explicite* scharakteryzowana pięcioma aksjomatami zebranymi w grupę *Pojęcia Wspólne*. Czytamy:

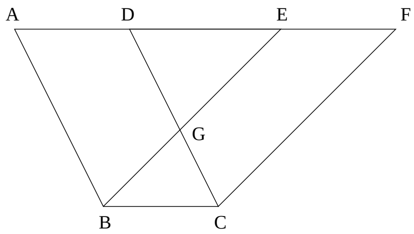
> Równe tej samej są sobie równe.
> I gdy równe są dodane do równych, to całości są równe.
> I gdy równe są odjęte od równych, to pozostałości są równe.
> I nakładające się są sobie równe.
> I całość jest większa od części.

Trzy pierwsze aksjomaty są interpretowane formułami:
Jeżeli $a = c,\ b = c$, to $a = b$.
Jeżeli $a = b,\ c = d$, to $a + c = b + d$.
Jeżeli $a = b,\ c = d$, to $a - c = b - d$.
Przyjmuje się, że aksjomat czwarty orzeka, iż figury przystające są równe. Aksjomat piąty zaś do dzisiaj nie znalazł przekonującej interpretacji.

Idźmy dalej. W Księdze I *Elementów* niemal w każdym twierdzeniu spotykamy „równe odcinki", „równe boki", „równe kąty", „równe trójkąty". Poczynając od wstępnych definicji po twierdzenie I.34 włącznie, równość oznacza przystawanie. (Jest to oczywiście interpretacja, bo literalnie nie ma u Euklidesa tego pojęcia.) Do istotnej zmiany znaczenia dochodzi natomiast w twierdzeniu I.35:

> Równoległoboki na tej samej podstawie i między tymi samymi równoległymi są sobie równe.

Wszystkim twierdzeniom *Elementów* towarzyszą diagramy i niektóre dowody Euklidesa odnoszą się tylko do szczególnego układu przedstawionego na rysunku. W twierdzeniu I.35 diagram wygląda tak:

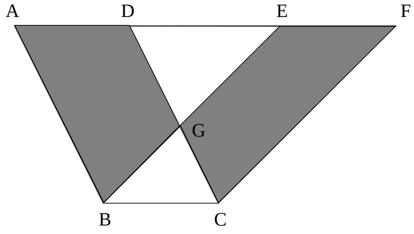


Widzimy tu, że równoległoboki $ABCD$, $EBCF$ nie są przystające (w tym celu wystarczy zauważyć, że równoległobok $ABCD$ może być np. prostokątem), Euklides jednak twierdzi, że „są sobie równe”.[5]

Dowód jest następujący: najpierw, na podstawie twierdzenia I.4, pokazuje się, że trójkąty ABE i DCF są równe, a dalej, w kluczowym momencie czytamy:

> Odejmijmy od obu DGE. [1] Wówczas pozostaje trapez $ABGD$ równy pozostałemu trapezowi $EGCF$. [2] Niech do obu zostanie dodany trójkąt GBC. Cały zatem równoległobok $ABCD$ jest równy całemu równoległobokowi $EBCF$.

Euklides nie tłumaczy na jakiej podstawie otrzymuje zdania [1], [2]. Można przyjąć, że chodzi tu odpowiednio o trzeci i drugi aksjomat równości, a wówczas tak zrekonstruujemy ten dowód: Od równych (przystających) trójkątów ABE i DCF odejmujemy trójkąt DGE. Trapezy, które zostaną, $ABGD$ i $EGCF$ — niżej przedstawiamy je jako zacieniowane — są równe (chociaż nie są przystające).



[5] W internetowym wydaniu *Elementów* diagramy są aktywne i *ABCD* łatwo może przekształcić w prostokąt; http://aleph0.clark.edu/ ˜djoyce/ java/ elements/ elements.html.

Gdy do trapezów dodamy trójkąt GBC, otrzymujemy tezę, tj. równość równoległoboków $ABCD$, $EBCF$.[6]

Twierdzenie I.35 inicjuje serię tez o figurach równych a nieprzystających, między innymi te oto:

> Trójkąty na równych podstawach i między tymi samymi równoległymi są sobie równe (I.38),
> Gdy równoległobok ma tę samą podstawę co trójkąt i jest między tymi samymi równoległymi, to równoległobok jest podwojeniem trójkąta (I.41),
> W danym kącie prostoliniowym skonstruować równoległobok równy danemu trójkątowi (I.42).

Taka jest droga Euklidesa do twierdzenia mówiącego o równym trójkącie i prostokącie, twierdzenia, w którym nierówne jest równe.

Dla podsumowania tego wątku wróćmy do dowodu twierdzenia I.35 i spójrzmy ponownie na krok [1]. Ten moment, gdzie to, co dla zwykłego oka jest nierówne zostaje uznane za równe możemy nazwać metafizycznym początkiem geometrii, tu bowiem Euklides wykracza poza zwykły ogląd rysowanych figur.

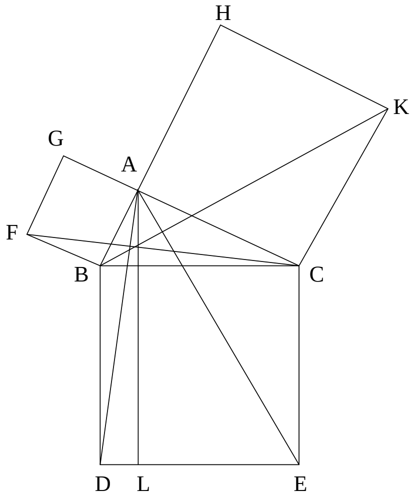
4. Wskażemy teraz jeszcze jeden, nawet bardziej spektakularny przykład, w którym „równe są nierówne”. Otóż zwieńczeniem Księgi I jest twierdzenie 47 (twierdzenie Pitagorasa):

> W trójkątach prostokątnych kwadrat na boku leżącym naprzeciw kąta prostego jest równy kwadratom na bokach obejmujących kąt prosty.

A oto towarzyszący mu diagram:

---

[6]David Fowler rekonstruuje twierdzenie I.35 bez użycia trzeciego aksjomatu równości, a przy tym posługuje się trochę innym diagramem, który bardziej przypomina dowód Hilberta (Hilbert, tw. 44) niż Euklidesa, Hilbert zaś w swojej teorii pola nie przyjmuje trzeciego aksjomatu równości. Zob. (Fowler, s. 10–11).



W tym przypadku dwa kwadraty, $GFBA$ i $HACK$ (Euklides nazywa je dwoma literami, odpowiednio GB i HC), są równe trzeciemu, $BDEC$. Dowód zaś tak przebiega:

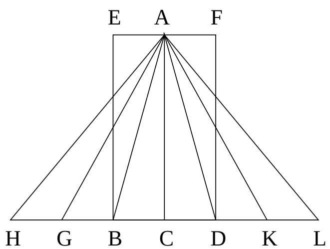
> [...] trójkąt ABD jest równy trójkątowi FBC. I równoległobok BL jest podwojeniem trójkąta ABD. [...] I kwadrat GB jest podwójnym trójkątem FBC. [...] Zatem równoległobok BL jest równy kwadratowi GB. [...] Podobnie [...] można pokazać, że równoległobok CL jest równy kwadratowi HC. Zatem cały kwadrat $BDEC$ jest równy dwóm kwadratom GB, HC.

Twierdzenie to w oryginalnej postaci brzmi dla współczesnego czytelnika na tyle dziwnie, że zwykle tłumacze dopowiadają, iż chodzi tu o „sumę kwadratów". W istocie niewiele to zmienia, bo czy wiemy jak sumować kwadraty? Tym niemniej ta uwspółcześniona wersja bardziej już przypomina znaną wszystkim, oswojoną i nie budzącą zbędnych dociekliwości postać $AB^2 + AC^2 = BC^2$; w tej interpretacji suma to zwykle dodawanie liczb rzeczywistych, zaś AB^2 to nie kwadrat-figura, ale kwadrat liczby rzeczywistej, to samo odnosi się do AC^2 i BC^2. Pojęcie liczby rzeczywistej jest jednak całkowicie obce matematyce greckiej. Tak to poplątane są ścieżki dopowiedzeń.

Czy faktycznie dla zrozumienia twierdzenia I.47 potrzebujemy interpretacji aż tak odległej od oryginału? Można pokazać, że na podstawie twierdzenia I.47 Euklides dopiero definiuje dodawanie kwadratów, ale to odwiodłoby nas daleko od uwag na temat równości, dlatego pozostając najbliżej, jak to tylko możliwe oryginalnego tekstu znajdujemy w twierdzeniu I.47 (a) równość zachodzącą między trzema przedmiotami, kwadratami GB i HC z jednej strony i kwadratem $BDEC$ z drugiej, oraz (b) dowód tego, że to, co nierówne, bo nieprzystające, np. kwadrat GB i prostokąt BL, jest równe — równe w jakimś przekraczającym zmysłowy ogląd sensie.

4.1. Znamy wiele (blisko 400) dowodów twierdzenia Pitagorasa i można wydzielić wśród nich dwie zasadnicze grupy. Część sprowadza się do pomysłowego podziału kwadratów na figury przystające. Równość oznacza wówczas w pierwszym rzędzie przystawanie, a dalej „równość przez podział”, sumowanie zaś to „składanie”. Druga grupa dowodów oparta jest na jakiejś, zwykle niewyjawionej, teorii podobieństwa i jakiejś, zwykle niewyjawionej, teorii pola, o której wiadomo tylko tyle, że pole jest liczbą przypisywaną figurze.[7] Dowód Euklidesa nie mieści się w żadnej z tych dwu grup.

W *Elementach* teoria podobieństwa jest rozwijana dopiero w Księdze VI i zakłada już to rozumienie równości, w którym figury nieprzystające mogą być równe. W punkcie wyjścia, w twierdzeniu VI.1 przyjmuje się, że „trójkąty na równych podstawach i między tymi samymi równoległymi są sobie równe”. Spójrzmy zresztą na diagram



[7]Zob. np. (Maor), (Jeleński).

i odpowiedni fragment dowodu:

> I skoro *CB*, *BG* i *GH* są sobie równe, to także trójkąty *AHG*, *AGB ABC* są sobie równe.

Równość jako przystawanie przekroczył Euklides w twierdzeniu I.35, a w twierdzeniu I.47 występuje już to szczególne rozumienie, w którym „równoległobok *BL* jest podwójnym trójkątem *ABD*". I właśnie tak rozumiana równość jest interpretowana jako równość pól.

Fowler nie zauważa, lub raczej nie docenia różnicy między równością jako przystawaniem i równością pól, i zestawia obok siebie dowody twierdzenia Pitagorasa oparte na tych różnych pojęciach równości.[8] Wynika to stąd, że nie chce on przyjąć do wiadomości, iż przystawanie jest jednym ze sposobów rozumienia równości, co z kolei tak uzasadnia:

> Równość zatem nie oznacza równości liczbowej miary pól i nie może oznaczać przystawania. W istocie przystawanie nie wydaje się być w *Elementach* ważnym pojęciem, gdyż Euklides nie ma dla niego odrębnego słowa. Mogłoby się wydawać, że *nakładanie się* występujące w czwartym aksjomacie równości będzie tu odpowiednim kandydatem, ale akurat ten fragment jest najpewniej wstawką, późniejszym dodatkiem [...] i Euklides nie wykorzystuje go w sposób systematyczny [...] (Fowler, s. 11).

Przede wszystkim powtórzy zatem: odróżnienie równości pól i równości jako przystawania jest oczywiście interpretacją, ale nie inaczej przecież postępuje Fowler w książce *The Mathematics of Plato's Academy*, która *de facto* jest poświęcona ułamkom łańcuchowym w matematyce greckiej chociaż ani w *Elementach*, ani w matematyce greckiej w ogóle nie występuje pojęcie ułamka łańcuchowego.

Po drugie, zauważmy, jakie możliwości rozpatruje Fowler: „równość liczbowej miary pól" i równość jako przystawanie. Widać więc, że nie uwzględnia on teorii pola rozwijanej bez pojęcia liczby i miary.

W *Grundlagen der Geometrie* David Hilbert rozwija dwie teorie pola wielokątów. Pole nie jest wówczas ani miarą (odpowiednią funkcją), ani liczbą przypisaną figurze, ale swoistą równością. Hilbert

[8]Zob. (Fowler, s. 20–21). Podobnie Joanna Świderek, jak i wielu, wielu innych autorów, nie odróżnia tych dowodów, zob. (Świderek, s. 30–31).

wprowadza nawet dwa pojęcia: „równość przez rozkład" i „równość przez uzupełnienie" i wykazuje przy jakich założeniach są one równoważne.[9] To właśnie do tych koncepcji nawiązują badacze odróżniający dwa rozumienia równości w *Elementach*. Takie rozróżnienie oczywiście ułatwia lekturę i odczytanie warstwy matematycznej.[10] Z filozoficznego punktu widzenia kardynalne znaczenie ma natomiast to, że Euklides mówi po prostu o równości prostokąta i trójkąta, o równości prostokąta i kwadratu. Przez wieki czytelnicy musieli sobie z tym radzić bez protezy pojęcia „równości pól".

5. Przechodzimy do dialogu *Menon*. Passus 81e-85d to — jak podaje Fowler — najstarsze, bezpośrednie i tak obszerne świadectwo matematyki greckiej; szacuje się, że dialog ten powstał w roku 385 p.n.e. Przedstawiona tu lekcja geometrii ma być w zamyśle Platona dowodem na to, że wiedza jest przypominaniem. Sokrates zadając pytania prowadzi Niewolnika do konstrukcji kwadratu dwa razy większego od danego kwadratu. „Bez nauczyciela, ale tylko dzięki stawianym pytaniom" Niewolnik wydobywa „swą wiedzę sam z siebie".

Zamysł filozoficzny dialogu wykracza daleko poza teorię wiedzy i po wywodach matematycznych Sokrates szybko przechodzi do spraw ostatecznych: skoro dla Niewolnika „prawdziwe mniemania obudzone pytaniami stały się wiedzą, to jego dusza zawsze musiała mieć tę wiedzę", „zatem jeśli prawda o istniejących rzeczach zawsze tkwi w naszej duszy, nasza dusza winna być nieśmiertelna".

„Prawda o istniejących rzeczach" to pewne twierdzenia o trójkątach i kwadratach. Przyjrzyjmy się im z perspektywy równości.

W fragmencie 81e-85d równość występuje w dwóch wątkach. Pierwszy to ten, w którym Sokrates podpowiada Niewolnikowi, że przekątne kwadratu są równe i przecinają się w połowie:

> Sokrates: (*do niewolnika*) Powiedz mi chłopcze, czy wiesz, że ta przestrzeń jest czworokątem.

---

[9]Zob. (Hilbert, rozdz. IV); trochę inną terminologię stosuje Hilbert w pierwszym wydaniu *Grundlagen* (1899).

[10]Pewną trudność stanowi to, że Hilbert nie wyjaśnia czym jest dodawanie figur, rozwiązanie Hartshorna polega zaś na wypełnieniu tej luki pojęciami teoriomnogościowymi.

> Niewolnik: Tak.
> Sokrates: I że ta czworokątna przestrzeń ma cztery równe linie?
> Niewolnik: Z pewnością.
> Sokrates: Tak samo te linie, które przechodzą przez środek, są równe?
> Niewolnik: Tak (*Menon*, 82b-c).

Sokrates i Niewolnik z pewnością są pochyleni nad kreślonymi w piasku liniami, a początkiem lekcji jest nie definicja i nie konstrukcja, ale po prostu rysunek kwadratu.[11]

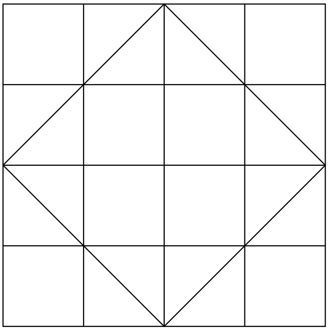
Idźmy dalej, „linie, które przechodzą przez środek" to zapewne przekątne. Skąd jednak Sokrates i Niewolnik wiedzą, że są one równe? Dowód nie jest tu oczywisty, ale gdy patrzymy na rysunek, to nawet nie czujemy potrzeby dowodzenia. Podobne uwagi można odnieść do sugestii, że przekątne przechodzą przez „środek" — przez co chyba należy rozumieć punkt przecięcia środkowych (linii łączących środki przeciwległych boków). Dowód nie jest oczywisty, ale gdy patrzymy na rysunek, to nawet nie pojawia się potrzeba dowodzenia.

I drugi, kluczowy dla wywodu matematycznego fragment, w którym Sokrates podsuwa Niewolnikowi myśl, aby za bok szukanego kwadratu obrać przekątną kwadratu danego:

> Sokrates: Potrzebujemy zaś przestrzeni dwa razy większej; pamiętasz?
> Niewolnik: Jak najbardziej.
> Sokrates: Czy ta linia, przeprowadzona od jednego kąta do drugiego nie dzieli powierzchni każdego kwadratu na dwie równe części.
> Niewolnik: Tak (*Menon*, 84e-85a).

Zdania te są zwykle ilustrowane takim rysunkiem:

[11] Reviel Netz w paragrafie poświęconym rysowaniu diagramów pisze: „Rysowanie na piasku może występować w *Menonie*, w lekcji geometrii, chociaż wprost nie jest to powiedziane" (Netz, s. 14). Dalej wskazuje na słowa Arystotelesa „tak jak w przypadku geometry, który narysuje linię na ziemi przyjmując, że jest długa na jedną stopę" (*Metafizyka*, 1078a) i sugeruje, że może to być aluzja właśnie do *Menona*.



Cały ciężar przedstawionego wywodu spoczywa na stwierdzeniu, że przekątna dzieli kwadrat na dwie równe części, co oznacza tu dwa przystające trójkąty. Skąd jednak Sokrates i Niewolnik wiedzą, że odpowiednie trójkąty są przystające? Współczesny czytelnik mógłby przywołać zasadę bok-kąt-bok (bok kwadratu-kąt prosty-bok kwadratu) i powiedzieć, że np. w systemie Hilberta jest to aksjomat. W starożytnej Grecji po Euklidesie można by powołać się na *Elementy* i twierdzenie I.34.[12] W *Menonie* jednak jest to najwyraźniej prosta obserwacja rysunku: Sokrates i Niewolnik po prostu widzą, że tak jest.

A jak odpowiednie fakty są przedstawiane przez Euklidesa?

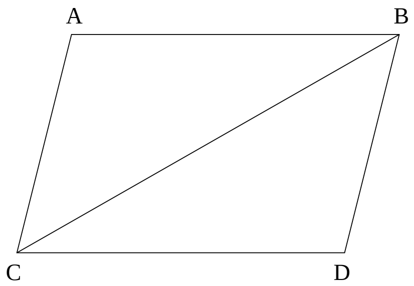
5.1. W *Elementach* już samo istnienie kwadratu jest dowodzone, dokładniej: w twierdzeniu I.46 jest opisana konstrukcja kwadratu, w którą zaangażowana jest cała machina dedukcyjna Euklidesa wraz z pewnikiem o prostych równoległych.[13]

Zobaczmy teraz, jak Euklides dowodzi, że przekątna dzieli równoległobok na przystające trójkąty.

> W równoległobocznych figurach, boki i kąty naprzeciwległe są sobie równe, a przekątna dzieli je na połowy (I.34).

[12]Lekcja geometrii z *Menona* była po wielokroć komentowana, ale nawet autorzy znający Euklidesa nie zestawiają tego fragmentu z twierdzeniem I.34; zob. np. (Giaquinto), (Klein, s. 99–107), (Norman, s. 54–55).

[13]Nie chcemy w tym miejscu wchodzić w uwagi o zależnościach między aksjomatami, w szczególności przy jakich warunkach z istnienia kwadratu wynika postulat o prostych równoległych, bo nie ma w *Menonie* najmniejszego śladu znajomości jakichkolwiek aksjomatów.



Dowód twierdzenia tak przebiega: Skoro *AB* i *CD* są równoległe, to kąty *ABC* i *BCD* są sobie równe. Skoro *AC* i *BD* są równoległe, to kąty *ACB* i *CBD* są sobie równe. Dalej czytamy:

> Tak więc *ABC*, *BCD* są dwoma trójkątami, w których kąty *ABC*, *BCA* są równe odpowiednio dwóm *BCD*, *CBD* i jeden bok równy bokowi, ten przy równych kątach i wspólny im, *BC*. Zatem będą one miały pozostałe boki równe odpowiednim pozostałym, i pozostały kąt pozostałemu.

Przedstawiony tu wniosek oparty jest na twierdzeniu I.26. Dowód drugiej części twierdzenia kieruje nas ku samym podstawom systemu Euklidesa. Czytamy:

> Bo skoro *AB* jest równy *CD*, zaś *BC* wspólny, dwa *AB*, *BC* są odpowiednio równe dwóm *CD*, *CB*. I kąt *ABC* jest równy kątowi *BCD*. W ten sposób podstawa *AC* jest równa *DB*. I trójkąt *ABC* jest też równy trójkątowi *BCD*.[14]

W ostatnich dwóch zdaniach Euklides najwyraźniej odwołuje się do twierdzenia I.4, które brzmi:

> Jeżeli dwa trójkąty mają dwa boki równe odpowiednio dwóm bokom i kąt ograniczony przez równe linie proste równy, to będę one miały też podstawę równą podstawie i ten trójkąt będzie równy trójkątowi [...].

[14]Fragment „dwa *AB*, *BC* są odpowiednio równe dwóm *CD* i *CB*" tłumacze często oddają w ten sposób: „dwa *AB*, *BC* są odpowiednio równe dwóm *DC* i *CB*", a więc w miejsce *CD* wstawiają *DC*, czasami pisząc nawet, że w tekście greckim jest ewidentna pomyłka. W istocie chodzi tu o to, czy Euklides odróżnia, czy też nie odróżnia odcinki *CD* i *DC*.

Dowód tego twierdzenia jest o tyle kontrowersyjny, że pojawia się w nim ruch, mianowicie:

> Niech trójkąt ABC będzie nałożony na trójkąt DEF, punkt A pokryje się z punktem D, a linia prosta AB z DE.

Dalsze wnioskowanie odstaje już od rygorów, które zwykliśmy przypisywać Euklidesowi. Dość powiedzieć, że w wykładzie Hilberta twierdzeniu temu przyznano rangę aksjomatu, dokładniej: wprost z aksjomatu

> Jeżeli w trójkątach ABC i $A'B'C'$ zachodzą kongruencje
>
> $$AB \equiv A'B', \quad AC \equiv A'C', \quad \angle BAC \equiv \angle B'A'C',$$
>
> to zachodzą też kongruencje
>
> $$\angle ABC \equiv \angle A'B'C', \quad \angle ACB \equiv \angle A'C'B',$$
>
> wyprowadza Hilbert twierdzenie odpowiadające twierdzeniu I.4 *Elementów*.[15]

Te dwa momenty, tj. użycie aksjomatu o prostych równoległych i twierdzenia I.4, świadczą o tym, że Euklidesa dowód faktu, iż przekątna dzieli równoległobok na równe trójkąty jest dalece niebanalny, a przyjmując współczesne rygory nawet niekompletny. U Platona natomiast odpowiedni fakt jest oparty na prostej obserwacji rysunku. W tym jednym zestawieniu widzimy, jak różna jest matematyka Platona i Euklidesa, jak kosmiczna wręcz odległość dzieli oczywistość oglądu dostępną Sokratesowi od dedukcji Euklidesa.[16]

6. Wróćmy do *Fedona* i słów:

---

[15]Zob. (Hilbert, aksjomat III,5 i twierdzenie 12).

[16]M. Giaquinto w (Giaquinto) przedstawia analizy, które można uznać za fenomenologię oczywistości. Wzorem takiego oczywistego faktu matematycznego jest dlań właśnie twierdzenie z *Menona*, stanowiące że przekątna dzieli kwadrat na równe trójkąty. Gdy jednak oceniamy ten fakt z perspektywy *Elementów*, to okazuje się, że jest on dalece nieoczywisty.

> Skąd wzięliśmy wiedzę o tym? Przecież nie z tych rzeczy, o których przed chwilą mówiliśmy, z kawałków drewna, kamieni i innych przedmiotów równych; nie z tych rzeczy pojawiła się w naszej myśli ta rzecz, która się od nich odróżnia. [...] W takim razie owe rzeczy równe i **równość sama** nie są tym samym.

Przyjmijmy, że poczynając od tego miejsca mówimy tylko o przedmiotach matematycznych, o odcinkach, kątach, trójkątach, kwadratach, a nie o kawałkach drewna, czy o kamieniach. Podążając za Platonem powiemy, że idea równości nie pojawiła się w naszej myśli z równych odcinków, kątów, trójkątów, czy kwadratów. Pozostaje tylko pytanie, która idea — przystawania, czy równości pól? Dla Platona „równość sama" to bez wątpienia przystawanie. Tak więc przystawanie nie tylko *wyprzedza* poznawanie przystających figur, ale *wyprzedza* też równość rozumianą jako równość pól.[17]

Coś podobnego znajdujemy we współczesnej matematyce, gdzie przystawanie odcinków i kątów jest pojęciem pierwotnym, a Hilbert wręcz pisze:

> „Odcinki są względem siebie w pewnej relacji, którą będziemy opisywać słowami «przystawanie» lub «równość»".[18]

Równość pól jest natomiast definiowana przez Hilberta i nie jest to już „równość sama", ale „równość przez rozkład", albo „równość przez uzupełnienie".

U Euklidesa jest inaczej. Zarówno przystawanie, jak i równość pól są wyprowadzane z *Pojęć Wspólnych* i w tym sensie są one równorzędne. Przypomnijmy:

> Równe tej samej są sobie równe.
> I gdy równe są dodane do równych, to całości są równe.
> I gdy równe są odjęte od równych, to pozostałości są równe.
> I nakładające się są sobie równe.

[17] W całym artykule staramy się tak rekonstruować Platona rozumienie równości, aby było ono niezależne od interpretacji jego ontologii. Stąd daleko posunięta ostrożność, czy wręcz drażniące niezdecydowanie wszystkich sformułowań odnoszących się do teorii idei.

[18] Analogiczna definicja ze zwrotem „«przystające» lub «równe»" odnoszona jest do kątów; zob. (Hilbert, §5). W pierwszym wydaniu *Grundlagen* (1899) w definicjach tych słowo „równość" nie pada.

W artykule przyjęliśmy, że aksjomat czwarty traktuje o przystawaniu figur, o trzecim zaś pokazaliśmy, że odgrywa znaczącą rolę w ustanowieniu równości pól.

7. I jeszcze raz *Fedon* i zdanie, które ogniskuje całe napięcie między Platonem i Euklidesem. Tym razem podamy kilka różnych przekładów:

> Ryszard Legutko: „Czy równe kawałki drewna lub kamienie, **pozostając takie same**, wydają się jednemu równe, a innemu nierówne?".
> Władysław Witwicki: „Czy kamienie równe i kawałki drewna, **nieraz takie same**, nie wydają się raz równe, a raz nie?".
> Beniamin Jowett: Do not equal stones and pieces of wood, **though they remain the same**, sometimes appear to us equal in one respect and unequal in another?". (Czy nie jest tak, że równe kamienie lub kawałki drewna, **chociaż pozostają takie same**, czasami wydają się nam równe pod pewnym względem i nierówne pod innym?).
> Emile Chambry: „N'arrive-t-il pas quelquefois que des pierres égales, des morceaux de bois égaux paraissent, **tout en étant les mêmes**, tantôt égaux, tantôt non?" („Czy nie zdarza się czasem, że równe kamienie, równe kawałki drzewa wydają się, **będąc takie same**, raz równe, to znowu nie?").

I jeszcze przekład możliwie najbliższy greckiemu oryginałowi:

> „Przeto, czyż nie kamienie równe i drzewa czasem **będąc takie same**, raz równe wydają się, raz nie".

W poprzednim punkcie, przyjmując dwa rozumienia równości, pytaliśmy, które jest pierwotniejsze i ustaliliśmy, że rozumując w duchu Platona przystawanie jest pierwotne, a równość pól jest, powiedzmy, pojęciem pochodnym, u Euklidesa zaś pojęcia te są równorzędne.

Podamy teraz naszą interpretację, ontologiczny opis tej różnicy stanowisk. W tym celu wykorzystamy pojęcie aspektu, które w innym miejscu zostało scharakteryzowane właśnie jako kategoria ontologiczna.[19]

[19]Zob. Błaszczyk, *Analiza filozoficzna...*, s. 351–371.

Otóż rozumując w duchu Platona równość jako przystawanie jest czymś pierwotnym, ideą, równość pól natomiast wiąże się z wyróżnieniem aspektu, sposobu oglądania przedmiotu: można wprowadzić, zdefiniować pojęcie pola figury, a następnie porównywać figury z uwagi na pole. Aspekt przedmiotu matematycznego wiąże się z teorią, w ramach której można przypisywać przedmiotowi własności, ale same własności, jak i ich zakres zależą od teorii. Dlatego właśnie można rozwijać różne teorie pola, jak chociażby te, które wskazał Hilbert. Przystawanie natomiast, „równość sama", *równość kształtów* figury nie jest zależna od jakiejkolwiek teorii. Krótko: równość sama jest absolutna, równość pól związana jest z aspektem.

U Euklidesa i przystawanie i równość pól związane są z aspektem. O równości pól powiedzieliśmy wyżej, a jak jest z przystawaniem, o jaki aspekt i o jaką teorię może tu chodzić? Przypomnijmy czwarty aksjomat równości: „I nakładające się są sobie równe". Idzie tu więc o teorię, w której orzeka się, jakim przekształceniom, jakim operacjom można poddawać figury bez *zmiany kształtu*, o teorię, w myśl której jeden trójkąt przesuwany i „nakładany" na drugi „pozostaje taki sam". Teoria ta stoi w tle dowodu twierdzenia I.4, a dzisiaj ma swój odpowiednik w pojęciu grupy przekształceń zachowujących odległości, która czasami jest nawet nazywana grupą euklidesową.

LITERATURA

Artman B., *Euclid: The Creation of Mathematics*, Springer, New York 2001.

Błaszczyk P., *Parada równości, czyli anty-Platon*, *Konspekt* 37, 2010, s. 47–50.

Błaszczyk P., *O definicji 7 z Księgi V 'Elementów' Euklidesa*, *Zagadnienia Filozoficzne w Nauce* 46, 2010, s. 117–139.

Błaszczyk P., *Analiza filozoficzna rozprawy Richarda Dedekinda „Stetigkeit und irrationale Zahlen"*, Wydawnictwo Naukowe AP, Kraków 2007.

Borsuk K., Szmielew W., *Podstawy geometrii*, PWN, Warszawa 1972.

Cornford M.F., *Plato and Parmenides*, Routledge & Kegan Paul, London 1939.

Euclidis Elementa, (ed.) J.L. Heiberg, Teubner, Leipzig 1883–1885 (cytowane fragmenty w tłumaczeniu K. Mrówki i P. Błaszczyka).

Fowler D., *Mathematics of Plato's Academy. A New Reconstruction*, Clarendon Press, Oxford 2003.

Fraenkel A., Bar-Hillel Y., Levy A., *Foundations of Set Theory*, NHPC, Amsterdam 1973.

Giaquinto M., *Epistemology of the Obvious: a Geometrical Case*, *Philisophical Studies* 92, 1998, s. 181–204.

Hartshorne R., *Geometry: Euclid and Beyond*, Springer, New York 2000.

Hilbert D., *Grundlagen der Geometrie*, Teubner, Leipzig 1930.

Jeleński Sz., *Śladami Pitagorasa*, WSiP, Warszawa 1988.

Klein J., *A Commentary on Plato's Meno*, The University of Chicago Press, Chicago 1965.

Maor E., *The Pythagorean Theorem*, Princeton UP, Princeton, Oxford 2007.

Netz R., *The Shaping of Deduction in Greek Mathematics*, Cambridge UP, Cambridge 1999.

Norman J., *After Euclid: Visual Reasoning & the Epistemology of Diagrams*, CSLI Publications, Stanford, California 2006.

Platon, *Fedon*, tł. R. Legutko, ZNAK, Kraków 1995.

Platon, *Menon*, tł. P. Siwek, PWN, Warszawa 1991.

Świderek J., *Rozważania matematyczne w pismach Platona*, Wydawnictwo UMCS, Lublin 2002.

SUMMARY

BETWEEN OBVIOUSNESS AND DEDUCTION. EUCLID AND PLATO ON EQUALITY

We confront Plato's understanding of equality in geometry with that of Euclid. We comment on Phaedo, 74b-c, Meno, 81e-85d and Elements, Book

I. We distinguish between two meanings of equality, congruence and equality of the area, and show that in Plato equality means congruence. In Euclid, starting with the first definitions until Proposition I.34, equality means congruence. In the proof of Proposition I.35 equality gains a new meaning and two figures that are not congruent, and in this sense unequal, are considered to be equal. While Plato's geometry is based on self-evident facts, Euclid's geometry rests on deduction and the axioms that are by no means self-evident. However, the shift of meaning from congruence to equality of the area can be substantiated by reference to Euclid's axioms of equality. Finally, we present an ontological interpretation of the two attitudes to equality that we find in Plato's and Euclid's writings.