Filozofia matematyki Wacława Sierpińskiego

Katarzyna Lewandowska
Uniwersytet Papieski Jana Pawła II w Krakowie, Wydział Filozoficzny

Sierpiński's philosophy of mathematics

Abstract

The main aim of the paper was to draw attention to Wacław Sierpiński as not only a great mathematician but also a philosopher. We undertook the attempt of reconstruction of Sierpiński's philosophy. To aim this goal we mainly based ourselves on Sierpiński's habilitation lecture entitled *The concept of correspondence in mathematics*. The complementation of Sierpiński's philosophical views were conclusions from his mathematical achievements, his scheme of research on The Axiom of Choice, and his attitude to this axiom.

Keywords

Wacław Sierpiński, philosophy of mathematics, Axiom of Choice, the concept of correspondence

Wacław Sierpiński był jednym z twórców polskiej szkoły matematycznej, kształcąc trzy pokolenia matematyków. Pośród szerokiego grona jego uczniów należy wymienić: Stanisława Ruziewicza, Ottona Nikodyma, Stefana Mazurkiewicza, Kazimierza Kuratowskiego, Bronisława Knastera, Stanisława Saksa, Kazimierza Zarankiewicza, Antoniego Zygmunda, Adolfa Lindenbauma, Karola Borsuka, Stefanię Braunównę, Edwarda Szpilrajn-Marczewskiego, Antoniego Wakulicza, Jerzego Browkina, Andrzeja Rotkiewicza i Andrzeja Schinzela. Polski matematyk, jako jeden z pierwszych na świecie, prowadził w 1909 roku na Uniwersytecie Lwowskim wykłady z teorii mnogości. W 1912 r. wydał piąte w porządku chronologicznym syntetyczne ujęcie teorii zbiorów: *Zarys teorii mnogości* (Sierpiński, 1928).

Aksjomat wyboru[1] jest zagadnieniem, którego nie sposób pominąć zajmując się teorią mnogości, nawet jeśli tylko pobieżnie dotykamy kwestii teorii zbiorów. Śmiało możemy go uznać za najbardziej interesujący i zarazem najbardziej kontrowersyjny aksjomat w dziejach matematyki. Jest jednym z najintensywniej badanych postulatów matematyki współczesnej. Określa się go,

[1] W niniejszej pracy używamy zamiennie określeń aksjomat wyboru, pewnik wyboru, aksjomat Zermela, zasada wyboru oraz skrótu AC. Dla lepszej przejrzystości naszych rozważań, przypominamy, iż aksjomat wyboru najczęściej formułuje się w następującej postaci: *Niech* $\Im \neq \emptyset$ *oraz* $\{X_j\}_{j \in \Im}$ *będzie rodziną niepustych zbiorów, wówczas istnieje odwzorowanie* $\tau : \Im \to \bigcup_{j \in \Im} X_j$ *takie, że* $\tau(j) \in X_j$ *dla każdego* $j \in \Im$.

jako drugi po V aksjomacie Euklidesa, najciekawszy, najmocniej krytykowany i najbardziej płodny aksjomat[2].

Nie dziwi zatem fakt, iż także Wacław Sierpiński, zajmując się teorią mnogości, nie mógł przejść obojętnie obok frapującej matematyków i filozofów zasady wyboru. Polski matematyk na arenę zmagań toczonych wokół aksjomatu wyboru nieprzerwanie od 1904 roku wkroczył około 1916 roku i uczynił aksjomat Zermela centrum swoich wieloletnich i wieloaspektowych badań. Co więcej, okazuje się, że dokonał on zasadniczego przełomu[3] w badaniach nad aksjomatem wyboru. Ponadto, prowadzone przez Sierpińskiego, czysto matematyczne badania teoriomnogościowe doprowadziły do wykrystalizowania się pewnych istotnych tez *stricte* filozoficznych.

---

[2] Powyższe określenia aksjomatu wyboru, pochodzące od różnych autorów, można znaleźć między innymi w (Herrlich, 2006).

[3] Podkreślmy w tym miejscu, iż Sierpiński u początku swoich badań nad aksjomatem wyboru (zasadniczo od 1916 roku do początku lat trzydziestych dwudziestego wieku) nie był w posiadaniu technicznych możliwości, by dokonać innego zasadniczego przełomu w debacie nad AC – wykazania faktu, iż zasada wyboru nie usprzecznia obowiązującego wówczas zestawu pozostałych aksjomatów teorii mnogości oraz jest od nich niezależna. Tym niemniej Sierpiński i jego zwolennicy, przed rozstrzygnięciem tych kwestii (wzmiankowanych już wyżej), pracowali w głębokim przekonaniu, iż pewnika wyboru nie da się wyprowadzić z innych aksjomatów teoriomnogościowych i nie generuje on sprzeczności w matematyce. Za powyższym świadczy między innymi fakt, iż podjęli oni szerokie badania nad różnymi wariantami postulatu Zermela i ich istotnym wpływem na kształt uprawianej matematyki (zależnej od tego, którą z wersji pewnika wyboru przyjmujemy).

Całość dokonań polskiego matematyka (na polu debaty wokół zasady wyboru) możemy podzielić na cztery kolejne etapy wyróżniające jego badania. Po pierwsze, Sierpiński uporządkował filozoficzne spory wokół pewnika wyboru – opierając się na wnikliwej analizie samej jego istoty, usystematyzował dotychczasowe stanowiska w sporze o AC. Następnie, odsunął na boczny tor swoich rozważań podstawowe kwestie filozoficzne generowane przez pewnik wyboru. Po trzecie, stworzył czysto matematyczny program badań aksjomatu Zermela, którego realizacja umożliwiała poznanie jego sensu i roli jako postulatu matematycznego. Ostatecznie, schemat wypracowany przez Sierpińskiego zmienił dalsze badania pewnika wyboru oraz wytyczył nowy kierunek w toczonej wokół AC debacie, nadając jej samej matematyczny charakter.

Dokonania polskiego matematyka możemy śmiało określić mianem przełomowych. Oryginalność i doniosłość jego wyników wyraziły się przede wszystkim wywarciem istotnego wpływu na sposób prowadzenia późniejszych badań pewnika wyboru, choć nie tylko. Program wypracowany przez Sierpińskiego przyczynił się także istotnie do powstania nowych nurtów w filozofii matematyki i pewnego rodzaju modyfikacji spojrzenia na pracę matematyka w ogóle. Szczególnie zaś mocno, przynajmniej w pewnych kręgach, dokonania Sierpińskiego odcisnęły piętno na sposobie pojmowania teorii mnogości i wpłynęły na jej dynamiczny rozwój.

Głównym zaś celem niniejszej pracy jest przedstawienie rekonstrukcji filozofii matematyki Wacława Sierpińskiego. W naszych analizach opieramy się w głównej mierze na wykładzie habilitacyjnym wygłoszonym przez polskiego matematyka w 1908 roku, zatytułowanym *Pojęcie odpowiedniości w matematyce* (Sierpiński, 1909). Swoiste zaś dopełnienie poglądów Sierpińskiego będą stanowiły wnioski płynące z analizy jego matematycznych dokonań, wprowadzonego programu badań aksjomatu wyboru oraz przyjmowanej postawy wobec zasady wyboru[4].

1. Wykład habilitacyjny Sierpińskiego

Zwróćmy najpierw uwagę na znamienny fakt, iż na materię wykładu habilitacyjnego wybrał Sierpiński zagadnienie z filozofii matematyki. Widzimy zatem, że rzeczywiście kwestie filozoficzne od samego początku drogi naukowej były polskiemu matematykowi bliskie i ważne. Sierpiński nie bał się poruszać spornych tematów z filozofii matematyki i zdawał sobie sprawę z faktu, iż wiele zagadnień czysto filozoficznych jest istotnych dla całokształtu matematyki i dlatego należy je znać i rozważać.

Celem wykładu habilitacyjnego Sierpińskiego było zaprezentowanie znaczenia i roli, jaką odgrywa pojęcie odpowiedniości w matematyce. Sierpiński w swoim wykładzie nie podał *explicite* definicji odpowiedniości. Dokonał raczej charakterystyki

[4] Podstawą przedstawionych w niniejszej pracy wyników jest analiza prac Wacława Sierpińskiego, skoncentrowanych na aksjomacie wyboru: (Sierpiński, 1918), (Sierpiński, 1916), (Sierpiński, 1928) oraz (Sierpiński, 1921).

tego pojęcia, poprzez wskazanie jego roli w matematyce. Wydaje się, iż Sierpiński używał pojęcia odpowiedniości czysto intuicyjnie, utożsamiając je z pewnego rodzaju przyporządkowaniem, relacją lub po prostu funkcją[5].

Już na samym wstępie wykładu Sierpiński podkreślał, że pojęcie odpowiedniości jest jednym z najważniejszych pojęć w matematyce:

> Przenika ono wszystkie dziedziny myśli matematycznej; jest podstawą, na której budujemy inne zasadnicze pojęcia; jest źródłem wszystkich najwspanialszych pomysłów (Sierpiński, 1909, s. 8).

Przypisując odpowiedniości istotną wagę w uprawianiu matematyki, Sierpiński powoływał się na Henri'ego Poincarégo, według którego matematycy nie badają przedmiotów lecz *de facto* zależności między nimi i co więcej, mogą swobodnie zastępować dane przedmioty innymi, z zastrzeżeniem zachowania danej zależności[6].

---

[5] *Pojęcie funkcji takie, jakie zdefiniowaliśmy wyżej [standardowe określenie funkcji jako przyporządkowanie między dwoma zbiorami spełniające określone warunki – K.L.] jest bardzo ogólne; w gruncie daje się ono sprowadzić do odpowiedniości między dwoma zbiorami* (Sierpiński, 1909, s. 19).

[6] *Les mathématiciens n'étudient pas des objets, mais des relations entre les objets; il leur est donc indifférent de remplacer ces objets par d'autres, pourvu que les relations ne changent pas* (Poincaré, 1902, s. 32).

Dla polskiego matematyka odpowiedniość odgrywała istotną rolę w szeroko rozumianej matematyce, przede wszystkim ze względu na jej znaczenie dla:

- praktycznych zastosowań matematyki; bez odpowiedniości nie ma w ogóle sensu mówić o aplikacji pojęć i obiektów matematyki do rozważań nauk praktycznych; nie ma sensu mówić o matematycznym modelowaniu danego zagadnienia;
- teoretycznych rozważań w tworzeniu matematyki (zob. Sierpiński, 1909, s. 8).

Wymienione przez Sierpińskiego zastosowania odpowiedniości generowały bardzo istotne zagadnienia filozoficzne. Mowa tu przede wszystkim o kwestii zależności między matematyką czystą a matematyką stosowaną oraz o szerokim zagadnieniu matematyczności świata fizycznego. Sierpiński w swoim wykładzie starał się odpowiedzieć na pytanie, dlaczego matematyka, będąca nauką czysto abstrakcyjną, ma bardzo liczne zastosowania w naukach fizycznych. Według niego akceptowalnym wytłumaczeniem mogłoby być istnienie pewnego istotnego związku między pojęciami matematycznymi a obiektami świata realnego:

> Na zakończenie zaznaczę tylko, iż fakt, że nauka, tak oderwana, jaką jest matematyka, znajduje tyle zastosowań realnych, wytłumaczyć daje się istnieniem doskonałej odpowiedniości między

> dziedziną abstrakcji a dziedziną realnej rzeczywistości (Sierpiński, 1909, s. 19).

Sierpiński wprowadził tym samym bardzo radykalną tezę filozoficzną. Orzekł on, iż istnieje pewnego rodzaju ścisła odpowiedniość między strukturą świata realnego a matematyką. Aby to przypisanie było możliwe, rzeczywistość fizyczna musi mieć pewną kluczową cechę, którą za Michałem Hellerem możemy współcześnie nazwać racjonalnością matematyczną. Świat fizyczny w swych najgłębszych fundamentach musi być matematyczny, skoro odpowiada mu struktura świata matematyki.

Rozważając powyższe kwestie, twórca polskiej szkoły matematycznej zwracał także uwagę na fakt, iż w praktycznych zastosowaniach matematyki kluczową rolę odgrywa samo pojęcie odpowiedniości. Właśnie dzięki stosowaniu odpowiedniości możemy świat realny opisywać i badać za pomocą matematyki:

> Śmiało rzec można, że całe praktyczne znaczenie matematyki zawdzięczamy stosowaniu pojęcia odpowiedniości (Sierpiński, 1909, s. 8).

Drugi filozoficzny aspekt rozważań Sierpińskiego był związany z teoretycznymi zastosowaniami odpowiedniości. Zdaniem polskiego uczonego, skoro pyta się jak odpowiedniość wpływa na kształt matematyki, to wchodzi się na obszar metodologii matematyki. Stawia się więc – między innymi – pytanie: jak powstaje matematyka? Właśnie temu zagadnieniu Sierpiński poświęcił w głównej mierze swój wykład. Chciał podkreślić teoretyczne znaczenie i rolę, jaką odpowiedniość odgrywa w samej matematyce jako takiej. Aby w pełni móc docenić wagę odpowiedniości, należy najpierw określić, czym jest odpowiedniość doskonała i na czym dokładnie polega jej zastosowanie w kształtowaniu matematyki.

Punktem wyjścia dla Sierpińskiego było pojęcie funkcji, czyli takiego odwzorowania, które każdemu elementowi pewnego zbioru X przyporządkowuje dokładnie jeden element drugiego zbioru Y. Innymi słowy, ustalając funkcję między dwoma zbiorami ustalamy według Sierpińskiego pewną odpowiedniość między elementami tych zbiorów.

Drugi krok przeprowadzony przez polskiego uczonego to zawężenie zbioru wszystkich funkcji do takich, które każdemu elementowi ze zbioru X przypisują za każdym razem inny element zbioru Y i każdy element zbioru Y odpowiada pewnemu elementowi ze zbioru X. Tego rodzaju odpowiedniość Sierpiński określił jako odpowiedniość doskonałą. Używając współczesnej terminologii, bijekcje to te odwzorowania, które według Sierpińskiego są utożsamiane z odpowiedniością doskonałą i mają one szczególnie istotne znaczenie dla całej matematyki (zob. Sierpiński, 1909, s. 9).

Po wprowadzeniu podstawowego pojęcia odpowiedniości doskonałej, Sierpiński pokazał, jak pracuje ono w poszczególnych gałęziach matematyki. Swój przegląd rozpoczął on od teorii mnogości, kierując uwagę w stronę liczb kardynalnych. Przypomniał, że u podstaw definicji liczby kardynalnej leży pojęcie równoliczności dwóch zbiorów, czyli – w jego „filozofującej" terminologii – pojęcie doskonałej odpowiedniości pomiędzy zbiorami (zob. Sierpiński, 1909, s. 9).

W klasie wszystkich liczb kardynalnych można wprowadzać działania i budować dalej bardzo bogatą arytmetykę liczb kardynalnych. Jest to możliwe dzięki takiemu narzędziu, jak odpowiedniość doskonała, która pozwoliła matematykom skupić się wyłącznie na zależności między mocami zbiorów i abstrahowaniu od poszczególnych elementów zbiorów. Ma to również szczególne znaczenie w kontekście powszechnie znanych paradoksów związanych z nieskończonością[7].

Rozważając powyższy problem, Sierpiński przypomniał, że potocznie najczęściej przyjmuje się, że pojęcie równej mocy jest identyczne z pojęciem tej samej liczności. Jeżeli zawęzimy się do zbiorów skończonych, podkreślał polski uczony, to takie utożsamienie jest jak najbardziej uzasadnione i poprawne. Jednakże patrząc w tych kategoriach na zbiory nieskończone, dochodzimy według Sierpińskiego do pewnych na pozór niezgodnych z intuicją wniosków:

- zbiór wszystkich liczb naturalnych parzystych jest tej samej mocy, co zbiór liczb naturalnych;
- zbiór liczb wymiernych (gęsty w $\mathbb{R}$) jest tej samej mocy, co zbiór liczb naturalnych;

[7] Sierpiński mówił w tym miejscu nie tyle o paradoksach, ile o *rażących przykładach* pokazujących pewne rozbieżności między własnościami zbiorów skończonych a zbiorów nieskończonych. (zob. Sierpiński, 1909, s. 11).

- zbiór punktów całej płaszczyzny jest równej mocy ze zbiorem punktów skończonego odcinka prostej (zob, Sierpiński, 1909, s. 10–12).

Powyższe paradoksy, znane już znacznie wcześniej, nie dają się przezwyciężyć, jeśli matematyka zatrzymałaby się tylko na leksykalnym porównywaniu liczności. Wydaje się, że tylko dzięki takiej, a nie innej definicji zbiorów równej mocy, opierającej się na istnieniu bijekcji między zbiorami, można było zrobić krok naprzód w rozważaniu nieskończoności.

Drugą gałęzią matematyki, w której odpowiedniość doskonała odgrywa kluczową rolę, była zdaniem polskiego uczonego arytmetyka. By zobrazować, jakie znaczenie dla arytmetyki ma omawiane pojęcie, Sierpiński (1909) przeprowadził następujące analizy.

Dane niech będą dwa zbiory X, Y, które są tej samej mocy, czyli wiemy, że istnieje bijekcja $f\colon X \to Y$ między tymi zbiorami. Załóżmy dalej, że w każdym ze zbiorów mamy określone pewne działanie $(\cdot,\cdot)_X$ oraz odpowiednio $(\cdot,\cdot)_Y$, które spełnia dodatkowo warunek:

Dla dowolnych $a, b \in X\ (a, b)_X = (f(a), f(b))_Y$

Według Sierpińskiego, otrzymujemy w ten sposób odwzorowanie nie tylko samego zbioru na drugi zbiór, ale i transport działania określonego na elementach zbioru X na odpowiednie działanie na elementach zbioru Y. Dzięki takiemu zabiegowi można w zbiorze, w którym nie mamy działań, zdefiniować działanie, odwołując się do innego zbioru, w którym już wcześniej mamy dobrze określone działanie (zob. Sierpiński, 1909, s. 12).

Zdaniem polskiego uczonego, innym bardzo ważnym dla rozwoju matematyki zastosowaniem odpowiedniości była swoista odpowiedniość między arytmetyką i geometrią. W tym aspekcie najlepszym i najbardziej charakterystycznym przykładem odpowiedniości była dla Sierpińskiego geometria analityczna, której podwaliny stworzył Kartezjusz. W swoim wykładzie polski matematyk podkreślił, iż główna idea geometrii analitycznej zasadza się na przyjętej przez francuskiego uczonego bijekcji (u Sierpińskiego – odpowiedniości doskonałej) między parami liczb rzeczywistych a punktami płaszczyzny:

> Ustalmy odpowiedniość doskonałą między punktem M, a parą dwóch liczb, x oraz y. Wprowadzamy w tym celu dwie proste prostopadłe OX i OY. Rozważmy ćwiartkę XOY. Każdemu punktowi M tej ćwiartki możemy przypisać w sposób jednoznaczny dwie liczby: pierwszą – x – odległość od osi OY, drugą – y – odległość od osi OX oraz odwrotnie – dwie liczby x, y wyznaczają przy przyjętej interpretacji dokładnie jeden punkt ćwiartki XOY[8].

[8] Można także punkt M przedstawiony za pomocą pary (x, y), utożsamić z liczbą zespoloną x + iy i budować arytmetykę liczb zespolonych (zob. Sierpiński, 1909, s. 13).

W ten oto sposób stało się według Sierpińskiego jasnym, iż każda figura geometryczna może być utożsamiona ze zbiorem punktów (x, y), dla których liczby x i y spełniają określone warunki wyrażone w postaci odpowiednich równań i nierówności. Obiekty geometrii stały się tym samym pewnymi obiektami algebraicznymi.

Nie podlega wątpliwości fakt, iż zaaplikowanie języka algebry do geometrii uczyniło tę drugą łatwiejszą do uprawiania i pozwoliło sformalizować naturalne, intuicyjne operacje na obiektach geometrycznych. Samo zaś wyrażenie takich operacji w języku geometrii jest zdecydowanie mniej przejrzyste[9].

Rozwój matematyki pokazał, iż połączenie geometrii z algebrą ma jeszcze jeden bardzo ważny wydźwięk w kontekście kształtowania się matematyki. Na obiektach algebraicznych, które zostały przypisane różnym figurom geometrycznym, można przecież wykonywać pewne operacje czysto algebraiczne. Zauważmy, że w tym miejscu nasuwa się automatycznie naturalne pytanie o interpretację geometryczną przeprowadzonej operacji. Znalezienie jej – jak zauważył Sierpiński – przyczynia się do lepszego rozumienia algebry i umożliwia dalsze, ciekawe analizy. Widzimy zatem, że ustalenie odpowiedniości

---

[9] Można podać wiele podobnych odpowiedniości. Dowolnemu punktowi M(x, y) odpowiada wektor skierowany o początku w punkcie O(0, 0) oraz o końcu w punkcie M($\overrightarrow{OM}$). W ten sposób określa się odpowiedniość doskonałą między liczbami zespolonymi a wektorami. Dzięki temu wszystkie geometryczne działania na wektorach i inne operacje możemy zapisać algebraicznie za pomocą liczb zespolonych (zob. Sierpiński, 1909, s. 13–15).

między dwoma pozornie odległymi dziedzinami wpływa na rozwój, atrakcyjność i przystępność obydwóch dyscyplin.

Równie ciekawe zastosowania odpowiedniości można znaleźć według Sierpińskiego w samej geometrii. Polski matematyk podał szereg przykładów obrazujących znaczenie odpowiedniości w poszczególnych działach geometrii. Pierwszą gałęzią geometrii, na którą Sierpiński zwrócił uwagę, była kartografia. Nauka ta, zajmując się odwzorowaniem kuli (sfery) na płaszczyźnie bada tym samym, jaka figura geometryczna na płaszczyźnie odpowiada dowolnej figurze geometrycznej na sferze (zob. Sierpisńki, 1909, s. 16).

Inną gałęzią geometrii badaną przez Sierpińskiego (1909), w której pojęcie odpowiedniości doskonałej ma bardzo szerokie zastosowanie, jest według polskiego uczonego geometria rzutowa. Istota odpowiedniości zasadza się w tym przypadku na możliwości zamiany pojęć: punkt i prosta. W geometrii rzutowej są to tak zwane pojęcia dualne. Sama zaś odpowiedniość punktów i prostych znajduje według Sierpińskiego wspaniały wyraz w tak zwanej zasadzie dwoistości, która umożliwia wypowiedzenie każdego aksjomatu i twierdzenia geometrii w dwóch dualnych postaciach (zob. Sierpiński 1909, s. 16–17):

V aksjomat Euklidesa

– *przez dwa różne punkty można poprowadzić dokładnie jedną prostą*

oraz

– *każde dwie różne proste przecinają się w dokładnie jednym punkcie.*

Twierdzenie Desarguesa:

– *dwa dowolne trójkąty na płaszczyźnie mają oś perspektywy*[10] *wtedy i tylko wtedy, gdy mają środek perspektywy*[11].

Ostatnią dziedziną, w której Sierpiński badał zastosowania odpowiedniości jest analiza matematyczna. Polski matematyk zwrócił uwagę zwłaszcza na zagadnienie ciągów liczbowych. Przytoczymy najpierw za Sierpińskim podstawowe definicje:

Rozważmy dowolny ciąg nieskończony

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

możemy konstruować dla niego następujące ciągi:

ciąg n-*tych sum częściowych szeregu nieskończonego*

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \,;$$

[10] *Mówimy, że dwa trójkąty mają oś perspektywy wtedy i tylko wtedy, gdy punkty przecięcia prostych zawierających odpowiednie boki trójkątów są współliniowe i prostą wyznaczoną przez te punkty nazywamy osią perspektywy.*

[11] *Mówimy, że dwa trójkąty mają środek perspektywy wtedy i tylko wtedy, gdy proste wyznaczone przez odpowiednie pary ich wierzchołków przecinają się w jednym punkcie, który nazywamy środkiem perspektywy.*

ciąg n-*tych iloczynów częściowych nieskończonego iloczynu*

$$p_n = \prod_{i=1}^{n} a_i \, ;$$

ciąg kolejnych reduktów nieskończonego ułamka łańcuchowego:

$$u_1 = \frac{1}{a_1}, u_2 = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}},$$

$$u_3 = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}}}, u_4 = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4}}}}, \ldots$$

Polski uczony, nie wchodząc w szczegóły teorii ciągów i szeregów, podał[12], iż w rzeczywistości, badając nieskończony szereg, iloczyn czy też ułamek łańcuchowy, badamy, dzięki pojęciu odpowiedniości, odpowiadający mu nieskończony ciąg częściowych sum, iloczynów, kolejnych reduktów. Ponadto, według Sierpińskiego, należy pamiętać, iż analizując dowolny ciąg nieskończony, można go przekształcić w odpowiadający mu szereg, iloczyn i ułamek łańcuchowy, wyznaczając kolejne jego czynniki. Polski uczony podkreślał, iż w wielu przypadkach nieskończone ciągi, szeregi, iloczyny i ułamki łańcuchowe to obiekty istotnie ze

[12] Sierpiński w swojej pracy odsyłał do porównania z wykładami uniwersyteckimi Stanisława Zaremby: *Teoria ciągów i szeregów nieskończonych* (Zaremba, 1906).

sobą powiązane, w taki sposób, iż twierdzenie dotyczące jednego z tych obiektów wpływa na twierdzenie dotyczące innego. Samo zaś badanie tych obiektów „analitycznie równoważnych" jest według Sierpińskiego w pełni uzasadnione, gdyż pewne twierdzenia łatwiej dają się wyrazić i udowodnić dla ciągów, inne dla szeregów, iloczynów, czy ułamków łańcuchowych (zob. Sierpiński, 1909, s. 18).

Przedstawiliśmy tylko pobieżnie zastosowania odpowiedniości zawarte w wykładzie habilitacyjnym Sierpińskiego. Wydaje się, iż w pełni potwierdzają one postawioną na początku wykładu habilitacyjnego metodologiczną tezę opisującą fundamentalne znaczenie odpowiedniości dla całej matematyki.

Tym sposobem odpowiedniość, zdaniem Sierpińskiego, okazała się być kluczowym narzędziem w rękach matematyka. Pojęcie to pozwala na abstrakcję od konkretnych, jednostkowych przedmiotów matematyki i pójście o krok dalej, prowadząc do coraz szerszych uogólnień. Daje szansę na skupienie się i dokładne badanie zależności między różnymi obiektami. Dzięki odpowiedniości można konstruować nowe pojęcia, badać ich własności, a co za tym idzie, twórczo rozwijać poszczególne dziedziny matematyki.

Szczególną zaś rolę odegrała odpowiedniość w arytmetyce liczb kardynalnych, gwarantując już samą właściwą definicję liczby kardynalnej. Zastosowanie w tym miejscu odpowiedniości doskonałej pozwoliło pozbyć się tego, co uchodziło wcześniej za paradoksalne i ostatecznie umożliwiło bezpieczne badanie matematycznej nieskończoności.

Ponadto, odpowiedniość jest także źródłem ciekawych inspiracji wiązania pewnymi zależnościami różnych teorii matematycznych. Ma zatem istotne znaczenie dla unifikacji matematyki. Ukazany przez Sierpińskiego pierwotny związek algebry z geometrią oparty na istnieniu pewnej odpowiedniości jest *de facto* spojrzeniem na matematykę niejako z zewnątrz i pokazaniem związków między różnymi teoriami matematycznymi.

Zauważmy, iż zastosowanie odpowiedniości w matematyce ma u Sierpińskiego również pewien walor heurystyczny. Ustalenie odpowiedniości między dwoma zbiorami obiektów pozwala przenosić pewne działania, relacje na zbiory ubogie w takie struktury. Wzbogacanie teorii matematycznych, które byłoby nie do pomyślenia bez odpowiedniości, odzwierciedla głębię matematycznego myślenia:

> Dobrzy matematycy widzą analogie między twierdzeniami, lepsi między teoriami, ale najlepsi widzą analogie między analogiami[13].

[13] Powyższy cytat pochodzi od innego wybitnego polskiego matematyka Stefana Banacha (zob. Nikonowicz, 1992).

2. Stosunek Sierpińskiego do pewnika wyboru

Wacława Sierpińskiego uznaje się za pierwszego (historycznie) obrońcę aksjomatu wyboru (zob. Moore, 1982, s. 195) choć winniśmy tu wyraźnie podkreślić, że Sierpiński nie postrzegał postulatu wyboru tak jak jego autor – Zermelo. Podchodził do niego jak do każdego innego aksjomatu:

> Wolno nam zawsze przyjąć lub odrzucić dany pewnik, jeżeli, naturalnie, nie przeczy on intuicji albo innym już przyjętym pewnikom. (Sierpiński, 1928, s. 101).

Według Sierpińskiego, żaden postulat matematyki, w szczególności również aksjomat wyboru, nie jest w jakikolwiek sposób uprzywilejowany. Podejmując decyzję o jego ewentualnej akceptacji, nie należy się kierować przyjętymi wcześniej założeniami, przekonaniami czy uprzedzeniami. Winno się raczej skupić na dokładnych filozoficznych i nade wszystko matematycznych analizach danego aksjomatu, jego konsekwencjach i zastosowaniach. Postawę Sierpińskiego wobec AC można zatem nazwać postawą obiektywnego badacza. Takie podejście wydaje się być jedynym właściwym, w szczególności zaś w sytuacjach, w których wymagane jest podjęcie decyzji mającej istotny i faktyczny wpływ na kształt całej matematyki.

Zermelo, wprowadzając w 1904 roku aksjomat wyboru, zwracał uwagę na jego oczywistość, prostotę i szerokie zastosowania. Należy podkreślić, że Sierpiński jako kluczową traktował jedynie rolę postulatu Zermela w matematyce. Nie postrzegał go ani w kategoriach prawdy czy fałszu, ani w kategoriach oczywistości bądź jej braku. Nigdy nie był też skłonny przypisać, podążając za stanowiskiem Zermela, zasadzie wyboru statusu prawa logicznego – założenia prostego, koniecznego i oczywistego, przyjmowanego w matematyce na samym ,,wejściu". Zwłaszcza, iż polski matematyk był świadomy nieporozumień, jakie spowodowały dotychczas sama formuła aksjomatu wyboru, jak i jego istota.

Można ponadto powiedzieć, że jego działania nigdy nie miały na celu przekonania matematyków czy filozofów do akceptacji pewnika Zermela. Dlatego w pewnym sensie aksjomat wyboru był dla niego obojętny. Decyzję o jego odrzuceniu lub przyjęciu pozostawiał do świadomego rozstrzygnięcia każdemu matematykowi. Podkreślał przy tym, czym powinna być poparta ta decyzja – pełną odpowiedzialnością za matematykę, jaką wybieramy akceptując AC, bądź z niego rezygnując.

Wydaje się, że na taką postawę Sierpińskiego miała istotny wpływ świadomość kontrowersji, jakie wprowadzał aksjomat wyboru wśród matematyków i filozofów. Polski matematyk był bardzo dobrze zaznajomiony z różnymi aspektami dyskusji wokół AC i mógł odnieść się do nich z dystansem. Warto tu podkreślić, że Zermelo, autor pewnika wyboru, mimo iż wiedział, że jego określenie tego aksjomatu jako oczywistego pociąga za sobą zarzut subiektywności, nie zrezygnował z niego i wierzył, że opory w stosunku do jego postulatu zostaną w końcu przezwyciężone. Sierpiński w swoich badaniach i sądach dotyczących pewnika wyboru pozostawał od samego początku w pełni obiektywny, bez żadnego zaangażowania ideologicznego.

Właśnie w duchu zdystansowanej obiektywności Sierpiński prowadził badania nad aksjomatem wyboru przez około 30 lat. Charakter i kolejność jego analiz są w pełni kompatybilne z deklarowaną postawą.

Początkowym etapem badań było poznanie prawdziwej istoty aksjomatu wyboru. Dostrzeżenie sensu i statusu zasady wyboru i zwrócenie uwagi na mylącą nazwę postulatu wyboru pozwoliło na pewne rozstrzygnięcia odnoszące się do filozofii matematyki. Jego prace dały systematyzację i swego rodzaju podsumowanie filozoficznych aspektów debaty wokół pewnika wyboru. Postulat Zermela okazał się być założeniem o charakterze czysto egzystencjalnym[14] i w związku z tym filozoficzne aspekty debaty wokół AC winny zostać przeniesione na grunt sporu o istnienie w matematyce.

Dopiero po uczynieniu przez Sierpińskiego powyższych rozstrzygnięć, stało się możliwym przejście do następnego, zasadniczego punktu badań. Ów drugi etap rozważań polskiego matematyka to czysto matematyczna analiza zależności między różnymi twierdzeniami a poszczególnymi wersjami aksjomatu wyboru, której wynik ma być kluczowy w decyzji o przyjęciu bądź odrzuceniu aksjomatu Zermela. Sierpiński przyjmował zatem postawę czysto pragmatyczną – nic innego, jak tylko prak-

[14] *Gdy natomiast pewnik [pewnik wyboru], ... należy uważać, jako czysty pewnik istnienia (Existenzaxiom)* (Sierpiński, 1928, s. 108).

tyczne zastosowania pewnika wyboru w pracy matematyka, mają dominującą wagę w rozstrzygnięciu problemu akceptacji AC:

> W każdym razie, jak to zaznaczyliśmy już wyżej, jest rzeczą wielce pożądaną rozróżnianie twierdzeń, które mogą być dowiedzione bez pewnika Zermelo, od twierdzeń których nie potrafimy dowieść bez pomocy tego pewnika. (Sierpiński, 1928, s. 113).

Powyższe podejście Sierpińskiego kontrastuje ze stanowiskiem wielu czołowych matematyków początku dwudziestego wieku zajmujących się teorią mnogości: Rene Baire'a, Emila Borela, Henriego Lebesgue'a, Felixa Bernsteina oraz Bertranda Russella (zob. Moore, 1982, s. 93–100, 110–111, 123–126). W latach 1904–1916 polemika prowadzona wokół AC wiązała się przede wszystkim z filozoficznymi kontrowersjami generowanymi przez pewnik wyboru. Mimo że w latach 1908–1916 rzadko były podejmowane nowe zagadnienia z filozofii matematyki związane z zasadą wyboru, echa krytyk z pierwszych lat debaty (1904–1908) nadal pozostawały ważne. Nic nie utracił na mocy zarzut braku konkretnej definicji, konstrukcji postulowanej w aksjomacie Zermela funkcji wyboru oraz problem wprowadzonej do matematyki przez Cantora nieskończoności aktualnej. Ponadto, nie została rozstrzygnięta kwestia statusu pewnika wyboru – czy może być traktowany jako zasada logiczna, czy należy szukać jego dowodu, czy nie prowadzi do sprzeczności i czym winno być uzasadnione jego ewentualne przyjęcie. Aksjomat wyboru tylko wznowił nierozwiązywalny spór o istnienie w matematyce.

Opisaną wyżej postawę możemy określić jako dogmatyczną. Charakteryzowała się ona istnieniem widocznego ścisłego sprzężenia między przyjmowaną filozofią matematyki a decyzją o akceptacji bądź odrzuceniu pewnika wyboru. Praktyka matematyczna, tak silnie akcentowana przez Wacława Sierpińskiego, zajmowała w takim podejściu drugorzędną rolę.

Prowadząc przez wiele lat badania nad zastosowaniami postulatu Zermela w czysto pragmatycznym duchu, Sierpiński niejednokrotnie podkreślał, jak bardzo aksjomat wyboru wpisany jest nie tylko w teorię mnogości, lecz także w analizę:

> Co się tyczy, w szczególności pewnika Zermelo, to należy w każdym razie mieć na względzie, że [...] pewnik Zermelo upraszcza znacznie wiele działów teorii mnogości i analizy oraz jest nieodzownym dla dowodu wielu ważnych twierdzeń tych nauk (Sierpiński, 1928, s. 101).

Polski matematyk zwracał zatem szczególną uwagę na fakt, iż w przypadku wielu twierdzeń pewnik wyboru jest po prostu nieodzowny. Nieusuwalność zasady wyboru z analizy czy teorii mnogości uzasadniał Sierpiński poprzez dowiedzenie, że pewne twierdzenia nie tylko są konsekwencją pewnika wyboru, lecz także same implikują AC (zob. Sierpiński, 1928, s. 113–114). Takie odkrycia dobitnie pokazują, jak ogromny wpływ na kształt matematyki ma decyzja o przyjęciu bądź odrzuceniu AC.

W związku z powyższym, według Sierpińskiego, niezależnie od faktu, czy akceptujemy pewnik wyboru czy go negujemy, niezależnie od tego, ile wątpliwości i problemów (przede wszystkim natury filozoficznej, choć nie tylko) nastręcza aksjomat wyboru, zawsze musimy liczyć się z jego rolą w teorii mnogości i analizie. Możemy zasadę wyboru odrzucić, możemy jej zaprzeczyć, ale nie wolno negować jej obecności i wagi wpisanych w matematykę klasyczną[15]:

> Niezależnie od tego, czy jesteśmy osobiście skłonni przyjąć pewnik Zermelo, czy też nie, musimy w każdym razie liczyć się z jego rolą w teorii mnogości i analizie (Sierpiński, 1928, s. 102).

Dla Sierpińskiego istotna była jeszcze jedna wartość aksjomatu wyboru. Uważał on, że można traktować postulat Zermela jako narzędzie heurystyczne, gdyż:

> pozwala wykryć twierdzenia (lub konstruować przykłady nieefektywne), których dowodów możemy szukać następnie na innej drodze (Sierpiński, 1928, s. 113).

Sierpiński twierdził, że jeżeli przeprowadzamy dowód twierdzenia za pomocą pewnika wyboru, powinniśmy mieć

[15] Nie wchodząc w precyzyjne wyznaczanie granic matematyki klasycznej, używając tego określenia mamy na myśli analizę XIX wieku oraz Cantorowską teorię mnogości.

świadomość, iż w rzeczywistości pokazujemy wynikanie pewnego wniosku z przyjętej prawdziwości zasady wyboru (pewnej szczególnej postaci zasady wyboru) (zob. Sierpiński, 1928, s. 113). Dowiedzenie tego typu faktów ma istotną wartość dla matematyki. Można później podjąć wyzwanie pominięcia aksjomatu Zermela lub udowodnić jego nieusuwalność.

Przytoczone fragmenty prac Sierpińskiego ukazują istotne cechy podejścia polskiego matematyka do aksjomatu wyboru. W jego rozważaniach na pierwszy plan wysuwa się obiektywizm. Według Sierpińskiego, podejmując zagadnienie przyjęcia bądź odrzucenia postulatu wyboru, należy zwrócić szczególną uwagę na jego zastosowania i nieodzowność w dowodzie wielu istotnych wyników matematyki. Na drugi plan winny zejść przyjęte wcześniej założenia czy upodobania. Decyzja o akceptacji lub negacji AC winna być oparta na pełnej świadomości wpływu tej decyzji na kształt uprawianej matematyki.

Podejście Sierpińskiego możemy zatem istotnie określić jako postawę obiektywnego obrońcy, badacza. Po uczynieniu filozoficznych rozstrzygnięć i podsumowań podjął on czysto matematyczne badania nad rolą pewnika wyboru. Tylko prawdziwe poznanie zastosowań zasady wyboru i jej znaczenia dla całej matematyki umożliwiało podjęcie właściwej decyzji o przyjęciu lub odrzuceniu AC.

3. Podsumowanie

Wykład habilitacyjny oraz postawa Sierpińskiego zajmowana wobec pewnika wyboru wskazują na nakierowanie w jego filozofii w stronę analizy praktyki matematycznej. Filozof, zdaniem Sierpińskiego, badając tak specyficzną dziedzinę, jaką jest matematyka, winien skupić się przede wszystkim na poznaniu, jak powstają poszczególne teorie matematyczne. Kluczowym było dokonanie analizy, jak prowadzone są poszczególne rozumowania matematyczne i jakie narzędzia się w nich wykorzystuje. W ten sposób Sierpiński wyznaczył pewnego rodzaju metodologię filozofii matematyki, w której głównym składnikiem jest pragmatyzm.

W wyniku analizy postawy polskiego matematyka wobec aksjomatu wyboru możemy stwierdzić, iż według Sierpińskiego, ilekroć filozof lub matematyk napotka na pewne sporne kwestie w podstawach matematyki, na przykład na problem przyjęcia bądź odrzucenia pewnych założeń, winien przyjąć w pierwszej kolejności postawę pragmatyczną. Główną zasadą, jaką powinien się kierować przy podjęciu ostatecznej decyzji o akceptacji bądź odrzuceniu danego aksjomatu, jest zasada owocności.

Aby uczynić zadość zasadzie owocności w przypadku decyzji o odrzuceniu bądź akceptacji zasady wyboru, należy w określony sposób zanalizować rolę aksjomatu Zermela w całej matematyce. Dopiero w dalszej kolejności, mając świadomość, w jaki sposób możemy w istocie zubożyć matematykę odrzucając ten aksjomat, możemy podjąć właściwą decyzję.

Przy rozstrzyganiu tego typu kwestii należy, zdaniem Sierpińskiego, przyjąć postawę w pewnym sensie neutralną i oprzeć się na obiektywnym badaniu wpływu danego aksjomatu na samą tylko matematykę.

Podkreślmy raz jeszcze, iż Sierpiński nigdy nie negował wagi filozoficznych zagadnień generowanych na łonie czystej matematyki. Istotne kwestie filozoficzne, dotyczące między innymi ontologii matematyki, pojawiają się u polskiego uczonego przynajmniej w dwóch miejscach. Po pierwsze, twórca polskiej szkoły matematycznej uważał, iż aksjomat Zermela jest w rzeczywistości postulatem o charakterze egzystencjalnym, pewnikiem istnienia[16]. Według niego, w aksjomacie wyboru nie postuluje się nic więcej jak tylko istnienie pewnego obiektu. W ten sposób filozoficzna analiza istoty stosowania zasady wyboru w matematyce doprowadziła Sierpińskiego do konieczności rozważenia sensu aksjomatu wyboru na tle sporu o istnienie w matematyce.

Drugie miejsce w rozważaniach Sierpińskiego, w którym zauważamy jego czysto filozoficzne deklaracje, to postawiona w wykładzie habilitacyjnym teza dotycząca istnienia odpowiedniości doskonałej między światem fizycznym (dziedziną realnej rzeczywistości) a matematyką (dziedziną abstrakcji) (zob. Sierpiński, 1909, s. 19). W tym bowiem stanowisku kryje się przede wszystkim przyjęcie

[16] *Lecz co to znaczy „istnieć”? To właśnie wielkie i dawne zagadnienie istnienia leży u podłoża całego sporu o pewnik Zermelo* (Sierpiński, 1928, s. 103).

założenia przypisującego światu fizycznemu, w jego najgłębszej strukturze, matematyczny charakter. Ponadto, wydaje się, iż ze słów Sierpińskiego możemy wyczytać ontologiczne założenia dotyczące istnienia pewnych obiektów należących do dziedziny matematyki. Odpowiedniość między światem fizycznym istniejącym rzeczywiście a światem matematyki domaga się bowiem założenia jakiegoś rodzaju istnienia przedmiotów badanych przez matematykę.

Prowadzone przez Sierpińskiego dogłębne badania AC pokazują, iż polski uczony przypisywał teorii mnogości kluczowe miejsce pośród wszystkich gałęzi matematyki. Wszak właśnie na gruncie teorii zbiorów został sformułowany aksjomat wyboru, który, zdaniem Sierpińskiego, istotnie wpisany jest w inne dyscypliny matematyczne. Po raz kolejny praktyka matematyka – badacza teorii zbiorów, doprowadziła twórcę polskiej szkoły matematycznej do czysto filozoficznej konkluzji. W tym bowiem kontekście, teoria mnogości stała się dla Sierpińskiego podstawową (w sensie metodologicznym) i fundamentalną dziedziną matematyki.

Bibliografia

Herrlich, H., 2006. *Axiom of choice*. Berlin, Heidelberg: Springer Verlag.

Moore, G.-H., 1982. *Zermelo's axiom of choice. Its origins, development and influence*. Berlin: Springer-Verlag.

Nikonowicz, D., 1992. *Stefan Banach (1892–1945)*, [online] Wortal Stefana Banacha, dostępny na: http://kielich.amu.edu.pl/Stefan_Banach/ nikonowicz.html [9 lutego 2016].

Poincaré, H., 1902. *La science et l'hypothèse.* Paris: Flamarion.

Sierpiński, W., 1909. Pojęcie odpowiedniości w matematyce. *Przegląd Filozoficzny*, *12*, s. 8–19.

Sierpiński, W., 1916. Sur le rôle de l'axiome de M. Zermelo dans l'analyse moderne. *Comptes Rendus des Séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, Classe III*, *163*, s. 688–691.

Sierpiński, W., 1918. L'axiome de M Zermelo et son rôle dans la théorie des ensembles et l'analyse. *Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie, Classe des Sciences Math. Série A,* s. 97–152.

Sierpiński, W., 1921. Les exemples effectifs et l'axiome du choix. *Fundamenta Mathematicae*, *2*, s. 112–118.

Sierpiński, W., 1928. *Zarys teorii mnogości*, 3. Warszawa: Skład Główny w Księgarni E. Wendego i S-ki.

Zaremba, S., 1906. *Teoria ciągów i szeregów nieskończonych.* Kraków: Wykłady Uniwersyteckie.